3次元弾性波動問題の演算子積分境界要素法による解析

福井大学工学部 ○ Andre Mahindra
福井大学大学院 学生会員 Teuku Khairuman
福井大学大学院 正 会 員 福井 卓雄

本研究では、3次元弾性波動問題を演算子積分境界要素法により解析することを目標としている。ここでは、境界要素法の定式化および高速多重極法適用の方針について簡潔に述べる。演算子積分境界要素法の利点の一つは基本解の Laplace 変換を積分核の構成に使うので、時間域の基本解を求めることが困難な粘弾性波動問題の場合にもまったく同じものを使えるということである。

1 弾性波動問題と演算子積分境界要素法

等方弾性体の波動伝播問題を対象とする。弾性波動問題の初期値境界値問題は変位 u_i に関する運動方程式

$$c_T^2 u_{i,jj} + (c_L^2 - c_T^2) u_{j,ji} + \frac{X_i}{\rho} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{1}$$

および、時刻 $t = 0$ における初期条件と境界条件

$$u_i(\boldsymbol{x}, 0) = u_i^0(\boldsymbol{x}), \qquad \dot{u}_i(\boldsymbol{x}, 0) = v_i^0(\boldsymbol{x}) \qquad\qquad t = 0,\, \boldsymbol{x} \in B \tag{2}$$

$$u_i(\boldsymbol{x}, t) = \hat{u}_i(\boldsymbol{x}, t) \quad \boldsymbol{x} \in \partial B_1, \qquad s_i(\boldsymbol{x}, t) = T_{ij}^n u_j(\boldsymbol{x}, t) = \hat{s}_i(\boldsymbol{x}, t) \quad \boldsymbol{x} \in \partial B_2 \tag{3}$$

により与えられる。ここに、c_L、c_T は縦波および横波速度、X_i は物体力、ρ は質量密度である。また、T_{ij}^n は変位から応力ベクトルを導く作用素である。

初期値境界値問題 (1)、(2)、(3) の解 u_i は時間領域境界積分方程式 (Love の積分公式)

$$C_{ij}(\boldsymbol{x}) u_j(\boldsymbol{x}, t) = \mathring{u}_i(\boldsymbol{x}, t) + \int_{\partial B} G_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \cdot) * s_j(\boldsymbol{y}, t)\, dS_y - \int_{\partial B} S_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \cdot) * u_j(\boldsymbol{y}, t)\, dS_y \tag{4}$$

により与えらえる。ここに、G_{ij}、S_{ij} は基本解および二重層核、$\mathring{u}_i$ は初期値あるいは外部からの擾乱による変位、C_{ij} は自由項であり、領域内部で δ_{ij}、なめらかな境界上で $\delta_{ij}/2$、領域外部で 0 の値をとる。

Love の公式における繰り込み積を、Lubich の演算子積分法により近似してやると、時間域において離散化された積分方程式

$$\begin{aligned} C_{ij}(\boldsymbol{x}) u_j(\boldsymbol{x}, n\Delta t) &= \mathring{u}_i(\boldsymbol{x}, n\Delta t) \\ &+ \sum_{k=1}^{n} \int_{\partial B} \tilde{G}_{ij}^{n-k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \Delta t) s_j(\boldsymbol{y}, k\Delta t)\, dS_y - \sum_{k=1}^{n} \int_{\partial B} \tilde{S}_{ij}^{n-k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \Delta t) u_j(\boldsymbol{y}, k\Delta t)\, dS_y \end{aligned} \tag{5}$$

が得られる。影響関数 $\tilde{G}_{ij}^m$、$\tilde{S}_{ij}^m$ は次のようになる。

$$\tilde{G}_{ij}^m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \Delta t) = \frac{\mu^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \hat{G}_{ij}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\right) e^{-2\pi i m l / L} \tag{6}$$

$$\tilde{S}_{ij}^m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \Delta t) = \frac{\mu^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \hat{S}_{ij}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\right) e^{-2\pi i m l / L} \tag{7}$$

ここに、$\delta(\zeta)$ は線形多段階法の生成多項式の商、$0 < \mu < 1$ は精度調整のパラメータであり、$\zeta_l = \mu e^{2/piil/L}$ である。$\hat{G}_{ij}$、$\hat{S}_{ij}$ は基本解の Laplace 変換および対応する二重層核で、Laplace 変換パラメータ p について

$$\hat{G}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, p) = \frac{1}{G}\left[g_T\delta_{ij} - \frac{1}{\kappa_T^2}\left(g_T - g_L\right)_{,ij}\right] \tag{8}$$

となる。ここに、$G = \rho c_T^2$ はせん断弾性係数である。g_L、g_T は、それぞれ、縦波および横波単独の波動方程式の基本解の Laplace 変換で、$r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$ とするとき

$$g_L(r) = \frac{e^{-\kappa_L r}}{4\pi r}, \qquad g_T(r) = \frac{e^{-\kappa_T r}}{4\pi r} \tag{9}$$

である。

2　高速多重極法の導入

高速多重極法は境界点相互の影響を高速に計算する方法である。要素数の多い問題に対しては、遅延ポテンシャルの計算に効果的に利用できる。演算子積分境界要素法の場合には、(5) に現れる境界積分を

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{\partial B}\tilde{G}_{ij}^{n-k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \Delta t)s_j(\boldsymbol{y}, k\Delta t)\,dS_y = \sum_{k=1}^{n}\frac{\mu^{-(n-k)}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}e^{-2\pi i(n-k)l/L}\int_{\partial B}\hat{G}_{ij}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\right)s_j(\boldsymbol{y}, k\Delta t)\,dS_y$$

と書き直して、境界積分の部分を高速化する。

高速多重極法の導入には、変位場の Helmholtz 分解が利用できる。すなわち、点 $\boldsymbol{y}$ に力 X_i が作用するときの基本解による場

$$u_i(\boldsymbol{x}) = \hat{G}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})X_j \tag{10}$$

について考える。(8) により

$$u_i(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{G}\left[g_T\delta_{ij} - \frac{1}{\kappa_T^2}\left(g_T - g_L\right)_{,ij}\right]X_j = \frac{1}{G\kappa_T^2}\left[\left((g_L)_{,j}X_j\right)_{,i} + e_{ijk}\left(e_{klm}(g_T)_{,m}X_l\right)_{,j}\right] \tag{11}$$

となる。最後の項において、ポテンシャル

$$\phi^G(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{G\kappa_T^2}(g_L)_{,j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})X_j, \qquad \psi_i^G(\boldsymbol{x}) = \frac{e_{ijk}}{G\kappa_T^2}(g_T)_{,k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})X_j \tag{12}$$

を導入すれば、基本解による場の Helmholtz 分解が得られる。同様に、点 $\boldsymbol{y}$ におけるくい違い U_i による二重層核の場についても

$$u_i(\boldsymbol{x}) = \hat{S}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})U_j = -\frac{1}{G\kappa_T^2}\left[\left(V_{jk}(g_L)_{,jk}\right)_{,i} + e_{ijk}\left(e_{klm}V_{ln}(g_T)_{,mn}\right)_{,j}\right] \tag{13}$$

ここに、

$$V_{ij} = \lambda\delta_{ij}n_k^yU_k + G(n_i^yU_j + n_j^yU_i) \tag{14}$$

と書くことができて、二重層核のためのポテンシャル

$$\phi^S(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{G\kappa_T^2}(g_L)_{,ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})V_{ij}, \qquad \psi_i^S(\boldsymbol{x}) = -\frac{e_{ijk}}{G\kappa_T^2}(g_T)_{,kl}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})V_{jl} \tag{15}$$

を導入することができる。結局、縦波による ϕ と横波による ψ_i とについて高速多重極法を構成すればよく。弾性波動問題の高速多重極法はスカラー波動問題の多重極展開 4 つで構成されることがわかる。