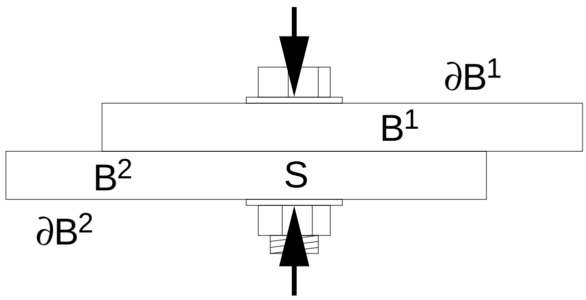
境界要素法による2次元弾性接触問題の解析と高力ボルト接合解析への応用

福井大学工学部　　　　　　　　○　岩崎 邦郎
福井大学大学院　正 会 員　　　　福井 卓雄

本研究は、同じ材質の物体の2次元弾性接触問題を解析するための境界要素法を定式化し、高力ボルト接合におけるボルト周辺の力学的挙動の解析に適用するものである。本来は3次元解析を行うべきであるが、ここでは、まず、定式化の容易な2次元解析を行い、ボルトの挙動に関する基礎的な知見を得ることを目的としている。

1　弾性体の接触問題

2次元空間中に2つの弾性体が存在するものとして、その2つの弾性体のもつ領域をそれぞれ B^1、B^2、物体の境界を ∂B^1、∂B^2 とする。また、2つの境界が近接し、接触の可能性のある面を S とする (図–1)。また、ここでは等方弾性体を仮定し、2つの弾性体の材質は同じものであるとする。以下では2つの領域のどちらに属しているかは上添字を使って表す。この添字には総和規約を適用しない。



図–1　接触している弾性体

面 S は3つの部分に分けることができる。非接触部分 S_0、接触しているが滑りは拘束されていない部分 S_s、および完全接触部分 S_c である。2つの弾性領域の立場からこれを見るときには、それぞれを、∂B_0^α、∂B_s^α、∂B_c^α と表記することにする。

接触条件を記述するために、境界上の変位および応力ベクトルの法線成分および接線成分を次のように定義する。

$$u_n^\alpha = n_i^\alpha u_i^\alpha, \qquad u_t^\alpha = t_i^\alpha u_i^\alpha, \qquad s_n^\alpha = n_i^\alpha s_i^\alpha = \sigma_{nn}^\alpha, \qquad s_t^\alpha = t_i^\alpha s_i^\alpha = \sigma_{nt}^\alpha \tag{1}$$

ここに、$t_i = -e_{3ij} n_j$ は接触境界における単位接線ベクトルである。また、σ_{nn}^α は境界における法線方向直応力成分、σ_{nt}^α はせん断応力成分である。

上の表記を用いて、面 S 上の非接触・接触の条件は次のように書くことができる。

$$n_i^1(u_i^1 - u_i^2) = u_n^1 + u_n^2 < a, \quad s_i^1 = s_i^2 = 0 \quad (s_n^1 = s_n^2 = 0,\, s_t^1 = s_t^2 = 0) \qquad \text{on } S_0 \tag{2}$$

$$u_n^1 + u_n^2 = a, \quad s_n^1 = s_n^2 < 0, \quad s_t^1 = s_t^2, \quad |s_t^\alpha| < \mu s_n^\alpha \qquad \text{on } S_s \tag{3}$$

$$u_n^1 + u_n^2 = a, \quad \dot{u}_t^1 + \dot{u}_n^2 = 0, \quad s_n^1 = s_n^2 < 0, \quad s_t^1 = s_t^2, \quad |s_t^\alpha| = \mu s_n^\alpha \qquad \text{on } S_c \tag{4}$$

ここで、a は2つの境界の変形前の距離、μ は2つの物体間のマサツ係数であり、$\dot{u}_t^\alpha$ は u_t^α の変化率を表すもので、接触面の滑りを考慮する上で必要となる量である。

解析は、接触面の変化を考慮しながら逐次的に進める必要がある。したがって、全変位および全応力ベクトルによる条件に加えて、これらの変化率についての条件を考慮する必要がある。変化率に関する条件は次のようになる。

$$\dot{s}_n^1 = \dot{s}_n^2 = 0, \quad \dot{s}_t^1 = \dot{s}_t^2 = 0 \qquad \text{on } S_0 \tag{5}$$

$$\dot{u}_n^1 + \dot{u}_n^2 = 0, \quad \dot{s}_n^1 = \dot{s}_n^2, \quad \dot{s}_t^1 = \dot{s}_t^2 \qquad \text{on } S_s \tag{6}$$

$$\dot{u}_n^1 + \dot{u}_n^2 = 0, \quad \dot{u}_t^1 + \dot{u}_n^2 = 0, \quad \dot{s}_n^1 = \dot{s}_n^2, \quad \dot{s}_t^1 = \dot{s}_t^2 \qquad \text{on } S_c \tag{7}$$

明らかに、変化率による条件だけでは接触・非接触の判定はできないので、全変位・全応力ベクトルによる接触状態の判定が必要である。

2　境界積分方程式

接触条件 (2)–(7) を見ると、S 上の条件はクラック問題と類似していることがわかる。すなわち、S_0 は開口するクラック、S_s は滑りだけが生じるクラック、S_c は連続域と対応している。したがって、クラック問題と同様の境界積分方程式を導くことができる。積分表示をまとめて示すと

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}u_i^\alpha(\boldsymbol{x}) = &\sum_{\alpha=1,2}\int_{\partial\hat{B}^\alpha} G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})s_j^\alpha(\boldsymbol{y})\,ds_y - \sum_{\alpha=1,2}\int_{\partial\hat{B}^\alpha} S_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})u_j^\alpha(\boldsymbol{y})\,ds_y \\
&- \int_{S_0} n_j S_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(u_n^1+u_n^2)(\boldsymbol{y})\,ds_y - \int_{S_0} t_j S_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(u_t^1+u_t^2)(\boldsymbol{y})\,ds_y \\
&- \int_{S_s} t_j S_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(u_t^1+u_t^2)(\boldsymbol{y})\,ds_y \qquad \boldsymbol{x}\in\partial\hat{B}^1\cup\partial\hat{B}^2
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
0 = &\sum_{\alpha=1,2}\int_{\partial\hat{B}^\alpha} \tilde{S}_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})s_j^\alpha(\boldsymbol{y})\,ds_y - \sum_{\alpha=1,2}\int_{\partial\hat{B}^\alpha} U_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})u_j^\alpha(\boldsymbol{y})\,ds_y \\
&- \int_{S_0} n_j U_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(u_n^1+u_n^2)(\boldsymbol{y})\,ds_y - \int_{S_0} t_j U_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(u_t^1+u_t^2)(\boldsymbol{y})\,ds_y \\
&- \int_{S_s} t_j U_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(u_t^1+u_t^2)(\boldsymbol{y})\,ds_y \qquad \boldsymbol{x}\in S_0
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{nn}(\boldsymbol{x}) = &\sum_{\alpha=1,2}\int_{\partial\hat{B}^\alpha} n_i\tilde{S}_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})s_j^\alpha(\boldsymbol{y})\,ds_y - \sum_{\alpha=1,2}\int_{\partial\hat{B}^\alpha} n_iU_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})u_j^\alpha(\boldsymbol{y})\,ds_y \\
&- \int_{S_0} n_in_j U_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(u_n^1+u_n^2)(\boldsymbol{y})\,ds_y - \int_{S_0} n_it_j U_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(u_t^1+u_t^2)(\boldsymbol{y})\,ds_y \\
&- \int_{S_s} n_it_j U_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(u_t^1+u_t^2)(\boldsymbol{y})\,ds_y \qquad \boldsymbol{x}\in S_s\cup S_c
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{nt}(\boldsymbol{x}) = &\sum_{\alpha=1,2}\int_{\partial\hat{B}^\alpha} t_i\tilde{S}_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})s_j^\alpha(\boldsymbol{y})\,ds_y - \sum_{\alpha=1,2}\int_{\partial\hat{B}^\alpha} t_iU_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})u_j^\alpha(\boldsymbol{y})\,ds_y \\
&- \int_{S_0} t_in_j U_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(u_n^1+u_n^2)(\boldsymbol{y})\,ds_y - \int_{S_0} t_it_j U_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(u_t^1+u_t^2)(\boldsymbol{y})\,ds_y \\
&- \int_{S_s} t_it_j U_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(u_t^1+u_t^2)(\boldsymbol{y})\,ds_y \qquad \boldsymbol{x}\in S_s\cup S_c
\end{aligned} \tag{11}$$

となる。これらの式は、変位および応力ベクトルの変化率についても同様に成立する。接触面 S_s の上では、$\sigma_{nt} = \pm\sigma_{nn}$ の条件が与えられるので、すべての未知関数を決定することができる。

詳細な計算結果については当日報告する。