

二次元非定常熱伝導問題における 演算子積分時間領域境界要素法への高速多重極法の適用

福井大学大学院 学生会員 瀬川 尚揮
東京工業大学大学院 正会員 斎藤 隆泰
福井大学大学院 正会員 福井 卓雄

1. はじめに

境界要素法における時間領域解法では、定式化が複雑であること、時間増分を慎重に決定しなければ問題によっては安定に解を求められないこと等の問題を持つ。従って、近年、これらの問題を解決するため、Lubich によって提案された演算子積分法¹⁾²⁾を適用した演算子積分時間領域境界要素法に関する研究が行われている。

しかしながら、演算子積分時間領域境界要素法では、各ステップごとの影響関数を保存しておく必要があること、計算量が要素数の 2 乗に比例して増加すること等の理由から、大規模問題の解析に適さないという問題を持つ。

そこで、本論文では Greengard, Rokhlin によって提案された高速多重極法³⁾を演算子積分時間領域境界要素法へ適用する。これにより、計算量・記憶容量の双方が大きく低減されることが期待される。従って以下では、まず二次元非定常熱伝導問題における時間領域境界要素法の定式化について述べ、次に演算子積分法を適用した時間領域境界要素法について述べる。そして高速多重極法の適用方法について述べた後、解析例を示し本手法の有効性を示す。

2. 二次元非定常熱伝導問題における時間領域境界要素法の定式化

まず、二次元非定常熱伝導問題における時間領域境界要素法の定式化について述べる。図 1 に示すようなある領域 Ω における非定常熱伝導問題を考える。すると、この問題は次に示す支配方程式を満たす。

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t}\right) T(x, t) = 0 \quad (1)$$

ここに、 T は任意の点 x の時刻 t における温度であり、 α は熱伝導係数である。この問題において、領域内部の初期条件を $T(x, 0) = \bar{T}$ とし、また、境界条件を次のように与える。

$$\begin{aligned} T &= \hat{T} \quad \text{on } \Gamma_1 \\ q &= \frac{\partial T}{\partial n} = \hat{q} \quad \text{on } \Gamma_2 \\ \lambda q &= -h(T - T_\alpha) \quad \text{on } \Gamma_3 \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 Γ は領域 Ω を取り囲む境界であり、 $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 = \Gamma$ である。また、 λ は熱伝導率、 \hat{T} 、 \hat{q} は与えられた境界条件であり、 h は熱伝達係数、 T_α は外部雰囲気温度である。この問題の解は、次の時間領域境界積分方程式を解くことにより

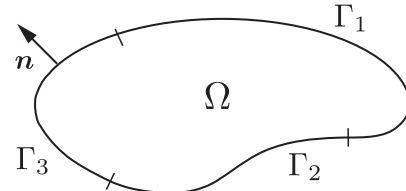


図-1 問題領域 Ω とその境界 Γ

求められる。

$$\begin{aligned} C(x)T(x, t) &= \frac{1}{\alpha} \left[\int_{\Omega} G(x, \mathbf{y}, t) \bar{T}(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} \right]_{\tau=0} \\ &+ \int_{\Gamma} G(x, \mathbf{y}, t) * q(\mathbf{y}, t) d\Gamma_{\mathbf{y}} - \int_{\Gamma} S(x, \mathbf{y}, t) * T(\mathbf{y}, t) d\Gamma_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、 $*$ は繰込み積分を表し、 x は観測点、 y はソース点である。また、 $C(x)$ は自由項であり、 x が滑らかな境界上なら $1/2$ 、領域内部なら 1 、領域外部では 0 を取る。 $G(x, \mathbf{y}, t)$ 、 $S(x, \mathbf{y}, t)$ は基本解、及び対応する二重層核であり次のように表される。

$$G(x, \mathbf{y}, t - \tau) = \frac{1}{4\pi(t - \tau)} \exp\left\{\frac{-r^2}{4\alpha(t - \tau)}\right\} \quad (4)$$

$$S(x, \mathbf{y}, t - \tau) = \frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{y}}} G(x, \mathbf{y}, t - \tau) \quad (5)$$

ここに、 $\partial/\partial n_{\mathbf{y}}$ は外向き法線方向微分を表し、 $r = |x - \mathbf{y}|$ によって定義される。

3. 演算子積分法の適用

演算子積分法は、繰込み積分 $f * g(t)$ を時間依存の関数 $f(t - \tau)$ の Laplace 変換を用いて離散化近似する手法である。一般に、繰込み積分は次のように表される。

$$f * g(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau, \quad (t \geq 0) \quad (6)$$

演算子積分法では、時刻 t を時間増分 Δt を用いて N ステップに分割することにより、式 (6) における繰込み積分を次のように近似する。

$$f * g(n\Delta t) \simeq \sum_{k=1}^n \omega_{n-k}(\Delta t)g(k\Delta t), \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (7)$$

ここに、 $\omega_n(\Delta t)$ は重み関数であり、次のように表される。

$$\omega_n(\Delta t) \simeq \frac{\rho^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} F\left(\frac{\gamma(z_l)}{\Delta t}\right) e^{-i\frac{2\pi ln}{L}} \quad (8)$$

ここに、 F は f の Laplace 変換であり、 $\gamma(z_l)$ は線形マルチステップ法 (差分法) における生成多項式の商である。また、 $z_l = \rho e^{i2\pi l/L}$ であり、 ρ は目標とする精度を ϵ として $\rho^L = \sqrt{\epsilon}$ により決定され、 L は定数である。

演算子積分法を式 (3) へと適用するため、まず一定要素を用いて境界を M_Γ 個、領域内を M_Ω 個に離散化する。ここで、 i 番目の境界要素における時間依存の境界値を $T_i(t)$ 及び $q_i(t)$ で表し、 i 番目の領域要素における初期値を \bar{T}_i で表す。時間増分を Δt とすると、 i 番目の要素に対し、第 n ステップにおける離散化された時間領域境界積分方程式は次のように表される。

$$\frac{1}{2}T_i(n\Delta t) = \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^{M_\Omega} \bar{A}_j^0(x_i)\bar{T}_j + \sum_{j=1}^{M_\Gamma} \sum_{k=1}^n [A_j^{n-k}(x_i)q_j(k\Delta t) - B_j^{n-k}(x_i)T_j(k\Delta t)] \quad (9)$$

ここに、 $\bar{A}_j(x_i)$, $A_j^m(x_i)$, $B_j^m(x_i)$ は影響関数であり、演算子積分法における重み表現式 (8) を用いることで、それぞれ次のように表される。

$$\bar{A}_j(x_i) = \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_{\Omega_j} \hat{G}(x_i, y, s_l) e^{-i\frac{2\pi ml}{L}} d\Omega_y \quad (10)$$

$$A_j^m(x_i) = \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_{\Gamma_j} \hat{G}(x_i, y, s_l) e^{-i\frac{2\pi ml}{L}} d\Gamma_y \quad (11)$$

$$B_j^m(x_i) = \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_{\Gamma_j} \hat{S}(x_i, y, s_l) e^{-i\frac{2\pi ml}{L}} d\Gamma_y \quad (12)$$

ここに、 $s_l = \gamma(z_l)/\Delta t$ で定義される。式 (11),(12),(10) はそれぞれ離散フーリエ変換の形で表されているため、FFT を利用することにより高速に計算することが可能である。 $\hat{G}(x, y, s_l)$, $\hat{S}(x, y, s_l)$ はラプラス変換域における基本解、及び対応する二重層核であり、次のように表される。

$$\hat{G}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} K_0(\kappa r) \quad (13)$$

$$\hat{S}(x, y, s) = -\frac{\kappa}{2\pi} K_1(\kappa r) \frac{\partial r}{\partial n_y} \quad (14)$$

ここに、 $\kappa = \sqrt{s/\alpha}$ であり、 K_n は n 次の第二種変形ベッセル関数である。式 (9) は境界上の未知量を解とした代数方程式へと帰着され、これを逐次的に解くことにより解を求めることができる。

4. 高速多重極法の適用

先にも述べた通り、式 (9) は要素数が増加するに伴い計算時間・記憶容量の双方から解くことが非常に困難になってしまう。従って、この欠点を改善するため、本論文では高速多重極法を境界要素法へと適用する。高速多重極法では、基本解を x, y における変数分離形で表し、複数の源点からの影響を一つに集めて一挙に評価する。また、領域を 4 分木構造を用いた階層構造で表し、高速多重極アルゴリズムを用

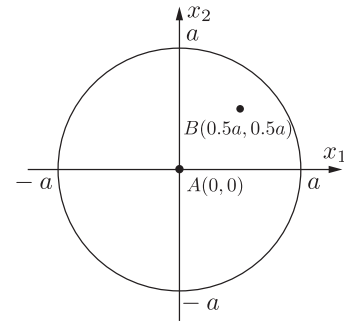


図-2 問題

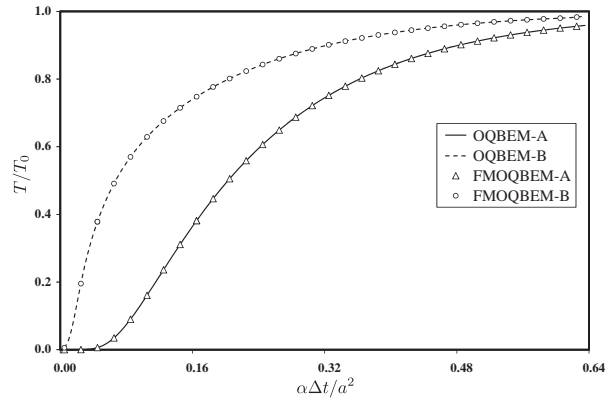


図-3 温度変化の時刻歴

いて効率的に計算を行っている。尚、高速多重極法を適用した境界要素法では、影響関数を各ステップごとに保存しておく必要がない為、記憶容量についても大幅に削減出来る。従って計算量・記憶容量双方の問題が改善され、取り扱う問題の規模が飛躍的に向上すると思われる。

5. 解析例

図 2 に示す半径 a の円筒内部の非定常熱伝導問題を考える。 $\alpha\Delta t/a^2 = 0.005$ とし、総ステップ数 $N = 128$ 、内部の初期温度を 0、境界条件は全ての境界上において温度を T_0 とした。演算子積分法におけるパラメータは $L = N$ 、 $\rho = 0.83536254(\epsilon = 10^{-20})$ とし、境界上は 128 個に分割した。図 3 に点 A(0,0) と点 B(0.5, 0.5) における温度変化の時刻歴を示す。演算子積分法のみを適用した境界要素法 (OQBEM) と更に高速多重極法を適用した境界要素法 (FMOQBEM) との解は良く一致している。

6. おわりに

二次元非定常熱伝導問題における演算子積分時間領域境界要素法に高速多重極法を適用した。また、解を比較することにより、解の精度を確認した。

今後は本手法の計算効率についても確認を行い、また多重極展開における展開項数について検証を進める予定である。

References

- 1) Lubich, C. : Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Numer. Math.*, **52**, pp. 129-145, (1988).
- 2) Lubich, C. : Convolution quadrature and discretized operational calculus II, *Numer. Math.*, **52**, pp. 413-425, (1988).
- 3) Greengard, L. and Rockhlin, V. : A fast algorithm for particle sumulations, *Journal of Comp. Physics*, **73**, pp. 325-348, 1987.