演算子積分法を用いた時間領域境界要素法による多群中性子拡散問題の解析

福井大学大学院　学生会員　○　山口　潤
福井大学大学院　正 会 員　　　福井 卓雄

1　はじめに

本論文では、多群中性子拡散方程式の時間領域境界要素法を Lubich の演算子積分法を適用して定式化する。

2　群中性子拡散問題

N 群中性子拡散方程式について、i 群の中性子束を ϕ_i とするとき、i 群の群拡散方程式は

$$\left(\delta_{ij}\nabla^2 - A_{ij} + B_{ij}\right)\phi_j + s_i = \frac{1}{C_{ij}}\frac{\partial \phi_j}{\partial t} \tag{1}$$

のように表すことができる。ただし、群は中性子エネルギーの大きいほうから番号付けされている。以下では、添字については総和規約を適用するものとする。ここで、(1) 中の各物理量について説明していく。s_i は中性子源の i 群への寄与分である。A_{ij}, C_{ij} は対角行列であり、その対角項は

$$A_{ii} = A_i = \frac{1}{D_i}\left(\Sigma_{ai} + \sum_{j=i+1}^{N}\Sigma_{i\to j}\right) \tag{2}$$

$$C_{ij} = C_i = v_i D_i \tag{3}$$

により与えられる。ここに、Σ_{ai} は i 群の巨視的吸収断面積、$\Sigma_{i\to j}$ は i 群から j 群への巨視的群遷移散乱断面積である。ここでは、中性子が散乱されるとエネルギーを失うと仮定しているため、$\Sigma_{i\to j} = 0$ $(i \geq j)$ である。v_i は i 群の中性子の速度、D_i は i 群の群拡散係数である。B_{ij} は群間の相互作用に関する係数で

$$B_{ij} = \frac{1}{D_i}\left(\Sigma_{i\to j} + \chi_i \nu \Sigma_f^j\right) \tag{4}$$

により与えられる。ここに、Σ_f^i は i 群の群平均巨視的核分裂断面積、χ_i は i 群にエネルギーを持って発生する核分裂中性子の平均個数である。また、上の定義式 (2)(3)(4) においては総和規約は適用しないものとする。

初期条件および境界条件は

$$\phi_i(\boldsymbol{x},0) = \phi_i^0(\boldsymbol{x}) \qquad \boldsymbol{x}\in B \tag{5}$$

$$\phi_i(\boldsymbol{x},t) = \hat{\phi}_i^0(\boldsymbol{x},t) \qquad \boldsymbol{x}\in \partial B_1 \tag{6}$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial n}(\boldsymbol{x},t) = \hat{J}_i(\boldsymbol{x}) \qquad \boldsymbol{x}\in \partial B_2 \tag{7}$$

となる。ここに、B および ∂B は与えられた領域およびその境界であり、ϕ_i^0 および $\hat{J}_i$ はそれぞれ境界上で与えられた群中性子束および群中性子流密度である。

3　時間領域境界要素法

3.1　境界積分方程式

N 元連立偏微分方程式 (1) の初期値境界値問題の解 ϕ_i は、もし、方程式 (1) の解 $G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},0)$ の存在を仮定することができれば、一般化 Green 公式

$$\begin{aligned} C\left(\boldsymbol{x}\phi_i(\boldsymbol{x},t)\right) &= \int_B G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\cdot) * s_j(\boldsymbol{y},t)\ dV_y \\ &+ \int_B G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\cdot)\phi_j(\boldsymbol{y},0)\ dV_y \\ &+ \int_{\partial B} G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\cdot) * \frac{\partial \phi_j(\boldsymbol{y},0)}{\partial n}\ dS_y \\ &- \int_{\partial B} S_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\cdot) * \phi_j(\boldsymbol{y},t)\ dS_y \end{aligned} \tag{8}$$

により表すことができる。ここに、$f * g$ は繰込み積である。$C(\boldsymbol{x})$ は自由項であり、$\boldsymbol{x}$ が領域内部にあるとき 1、なめらかな境界上にあるとき 1/2、境界外部にあるとき 0 の値をとる。また、添字 y は $\boldsymbol{y}$ についての積分であることを示す。$S_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ は二重層核であり、基本解により

$$S_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) = \frac{\partial G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)}{\partial n_y} \tag{9}$$

で与えられる。(8) において、右辺第 1 項は中性子源による項、第 2 項は初期値による項、第 3 項は境界値 $\partial\phi_i/\partial n$ による項、第 4 項は境界値 ϕ_i による項である。(8) は $\boldsymbol{x}$ が境界上にあるとき、道の境界値に関する境界積分方程式である。

3.2　時間領域境界要素法

時間域において演算子積分法を適用し、空間域において境界および領域を要素に分割し、境界関数および領域関数について近似を導入すると、境界要素法を構成することができる。

離散化後の境界積分方程式 (8) は

$$C(\boldsymbol{x})\phi_i(\boldsymbol{x}, n\Delta t) \simeq \sum_J^{M_B}\sum_{k=1}^{n} \bar{A}_{ij,J}^{n-k}(\boldsymbol{x}) s_{j,J}(k\Delta t)$$
$$+\sum_J^{M_B} \bar{A}_{ij,J}(\boldsymbol{x})\phi_{j,J}(0) + \sum_J^{M}\sum_{k=1}^{n} A_{ij,J}^{n-k}(\boldsymbol{x}) J_{j,J}(k\Delta t)$$
$$-\sum_J^{M}\sum_{k=1}^{n} B_{ij,J}^{n-k}(\boldsymbol{x})\phi_{j,J}(k\Delta t) \tag{10}$$

となる。ここに、M, M_B はそれぞれ、境界および領域内の要素分割数である。ここで、一定要素を用い、境界要素および領域要素についての近似関数を

$$\beta_i = \begin{cases} 1 & \boldsymbol{x} \in E_i \\ 0 & \text{other} \end{cases}, \quad \bar{\beta}_i = \begin{cases} 1 & \boldsymbol{x} \in \bar{E}_i \\ 0 & \text{other} \end{cases} \tag{11}$$

とする。ここに、$E_i, \bar{E}_i$ はそれぞれ、i 番目の境界要素および領域要素である。このとき、影響関数 $A_{ij,J}^{m}(\boldsymbol{x}), B_{ij,J}^{m}(\boldsymbol{x})$ および $\bar{A}_{ij,J}^{m}(\boldsymbol{x})$ は

$$A_{ij,J}^{m}(\boldsymbol{x}) = \frac{\rho^{-m}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\left[\int_{E_J}\hat{G}_{ij}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\ dS_y\right)\right]e^{-2\pi i\frac{ml}{L}}$$

$$B_{ij,J}^{m}(\boldsymbol{x}) = \frac{\rho^{-m}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\left[\int_{E_J}\hat{S}_{ij}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\ dS_y\right)\right]e^{-2\pi i\frac{ml}{L}}$$

$$\bar{A}_{ij,J}^{m}(\boldsymbol{x}) = \frac{\rho^{-m}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\left[\int_{\bar{E}_J}\hat{G}_{ij}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\ dV_y\right)\right]e^{-2\pi i\frac{ml}{L}}$$

となる。ここに、$\hat{G}_{ij}$ および $\hat{S}_{ij}$ は基本解および二重層核の Laplace 変換である。

4 群拡散方程式の基本解

4.1 Laplace 像空間における群拡散方程式

中性子束 ϕ の Laplace 変換を

$$\bar{\phi}(p) = \int_0^\infty \phi(t)e^{-pt}\ dt \tag{12}$$

で定義する。このとき、方程式 (1) の Laplace 変換は

$$\bar{\boldsymbol{L}}_{ij}\bar{\phi}_i = \left(\delta_{ij}\nabla^2 - \bar{A}_{ij} + B_{ij}\right)\bar{\phi}_i = -s_i \tag{13}$$

となり、時間に依存しない方程式となる。ここに、$\bar{A}_{ij} = A_{ij} + pC_{ij}$ は対角行列であるが、Laplace 変換パラメータ p を含んでいるため、複素行列となり得る。

4.2 Laplace 像空間における基本解

方程式 (13) の基本解は

$$\bar{\boldsymbol{L}}_{ij}\bar{G}_{jk}(\boldsymbol{x}) = -\delta_{ik}\delta(\boldsymbol{x}) \tag{14}$$

の解である。ここでは、空間座標に関する Fourier 変換

$$\tilde{\phi}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty}\phi(\boldsymbol{x})e^{i\xi_i x_i}\ dx \tag{15}$$

を用いて基本解を求める。(13) の Fourier 変換は

$$\begin{aligned}(M_{ij}-\delta_{ij})\tilde{G}_{ij}(\boldsymbol{\xi}) &= \tilde{\boldsymbol{L}}_{ij}\tilde{G}_{ij}(\boldsymbol{\xi}) \\ &= \left(-\delta_{ij}\xi_k\xi_k - \bar{A}_{ij} + B_{ij}\right) \\ &= -\delta_{ik}\end{aligned} \tag{16}$$

となる。これを行列表現すると

$$(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})\,\tilde{\mathbf{G}} = -\boldsymbol{I} \tag{17}$$

となる。行列 $\mathbf{M}$ の固有方程式は

$$|\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}| = 0 \tag{18}$$

である。この方程式は、代数学の基本定理により、N 個の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$ を持つ。それぞれの固有値に対して、同次方程式

$$\mathbf{M}\mathbf{p}_i = \lambda_i\mathbf{p}_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, N \tag{19}$$

により、右固有ベクトル $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_N$ を得ることができる。右固有ベクトルを列ベクトルとする行列 $\mathbf{P} = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_N\}$ を導入すると (19) により

$$\mathbf{M}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathrm{diag}(\lambda_*) \tag{20}$$

の関係がある。ここに、$\mathrm{diag}(\lambda_*)$ は対角行列

$$\mathrm{diag}(\lambda_*) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{pmatrix} \tag{21}$$

を表す。(20) により、

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P} = \mathrm{diag}(\lambda_*) \tag{22}$$

となる。すなわち、行列 $\mathbf{P}$ は行列 $\mathbf{M}$ を変換して対角行列にする。方程式 (17) に $\mathbf{P}$ を作用させることにより $\tilde{\mathbf{G}}$ は

$$\tilde{\mathbf{G}} = -\mathbf{P}\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\lambda_* - \lambda_i}\right)\mathbf{P}^{-1} \tag{23}$$

により求めることができる。この式の右辺は $1/(\lambda_i - \lambda)$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$ の線形結合となっている。

(23) により、Laplace 像空間での基本解は

$$\tilde{\mathbf{G}}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{P}\mathrm{diag}\left[g(\kappa_*|\boldsymbol{x}|)\right]\mathbf{P}^{-1} \tag{24}$$

となる。

参考文献

[1] C.Lubich：Convolution quadrature and discretized operational calculus, *Mumer. Math.*, 52, pp.129-145, 1998.

[2] J.R.Lamarsh and A.J.Barata：*Introduction to Nuclear Engineering*, Third Edition, Pearson Education Inc., 2001, (邦訳：原著第 3 版 原子核工学入門, 澤田哲夫 訳, ピアソン・エデュケーション, 2003).

[3] 福井 卓雄：演算子積分法による中性子拡散問題の時間領域境界要素法, 計算力学講演会論文集, 12, pp.861-864, 2007.

[4] 山口　潤, 福井　卓雄：低次群中性子拡散方程式の時間領域境界要素法, 応用力学論文集, Vol. 12, pp 179-186, 2009.