

弾塑性複合材料の巨視的降伏関数の推定

信州大学大学院 都筑 萌
 信州大学工学部 正員 小山 茂
 信州大学工学部 正員 大上 俊之

1. はじめに

土木構造物は多くが複合材料であり、内部に亀裂・介在物等の微視構造を有している。このような材料を解析する際、第一に必要な情報は材料が示す全体の動きであり、巨視的な材料パラメータを適切に評価することによりその予測が可能となる。そこで本研究は、弾塑性複合材料を対象とし、微視構造の情報を考慮した巨視的な降伏関数の陽な表現を示す。

2. 定式化

(1) 等価介在物法と森－田中の理論

以下では各諸量を体積平均で表す。森－田中の理論¹⁾により、母材と介在物における応力増分とひずみ増分との関係は

$$\dot{\sigma}_M = C_M(\dot{\epsilon}_D - \dot{\epsilon}_M^P), \quad \dot{\sigma}_I = C_I(\dot{\epsilon}_I - \dot{\epsilon}_I^P) \quad (1)$$

と表せる。ここに C_M, C_I は母材および介在物の弾性定数テンソルを、 $\dot{\sigma}_M, \dot{\epsilon}_D$ は母材の応力増分・ひずみ増分を、 $\dot{\sigma}_I, \dot{\epsilon}_I$ はそれぞれ介在物の応力増分・ひずみ増分を表す。 $\dot{\epsilon}_M^P, \dot{\epsilon}_I^P$ は母材および介在物の塑性ひずみ増分である。ここで母材のひずみ増分の体積平均を $\dot{\epsilon}_M$ と表記しないのは、 $\dot{\epsilon}_D$ が母材における単なる体積平均ではなく、介在物が多数含まれることによる乱れを考慮しているためである。つまり、 $\dot{\epsilon}_D$ には介在物同士の相互作用が含まれることに注意する。森－田中の理論では、母材は降伏しないものとして考えているが、ここでは介在物に $-\dot{\epsilon}_M^P$ 、材料全体に $\dot{\epsilon}_M^P$ を与えることにより母材の降伏を扱えるものとする。

介在物のひずみ増分は、母材のひずみ増分に母材と介在物の相互作用による乱れ $\dot{\gamma}_I$ が付加されたものとし、

$$\dot{\epsilon}_I = \dot{\epsilon}_D + \dot{\gamma}_I \quad (2)$$

と表す。ここで、等価介在物法²⁾を適用すると

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_I &= C_I(\dot{\epsilon}_D + \dot{\gamma}_I - \dot{\epsilon}_I^P) \\ &= C_M\{\dot{\epsilon}_D + \dot{\gamma}_I - (\dot{\epsilon}_I^P + \dot{\epsilon}^*)\} \end{aligned} \quad (3)$$

と書ける。ここに $\dot{\epsilon}^*$ は、eigen ひずみと呼ばれる非適合ひずみであり、上の等式を成立させるために導入した量である。一方、ひずみの乱れ成分と eigen ひずみとの間には

$$\dot{\gamma}_I = S(\dot{\epsilon}_I^P - \dot{\epsilon}_M^P + \dot{\epsilon}^*) \quad (4)$$

の関係がある。ここに S は Eshlby のテンソルで、等方弾性体に回転楕円体介在物が存在する場合、介在物形状と母材のポアソン比から決まる定数パラメータとなる³⁾。また、介在物中の応力とひずみは、一定となることが分かっている。

巨視的な応力増分・ひずみ増分を、母材と介在物の体積比率を重みとした平均によって

$$\dot{\bar{\sigma}} \equiv (1-f)\dot{\sigma}_M + f\dot{\sigma}_I, \quad \dot{\bar{\epsilon}} \equiv (1-f)\dot{\epsilon}_D + f\dot{\epsilon}_I \quad (5)$$

で定義する。ここに f は介在物の体積比率である。

以上の式を用いると母材と介在物の応力増分は、

$$\dot{\sigma}_M = A\dot{\bar{\sigma}} + D\dot{\epsilon}_M^P - D\dot{\epsilon}_I^P \quad (6)$$

$$\dot{\sigma}_I = B\dot{\bar{\sigma}} - E\dot{\epsilon}_M^P + E\dot{\epsilon}_I^P \quad (7)$$

と表せる。ここに係数 A, B, D, E は母材・介在物の弾性定数テンソル C_M, C_I 、Eshlby のテンソル S 、介在物の体積比率 f から決められるものである。特に A, B は弾性域で増分応力集中係数の意味を持ち、以下のように表せる。

$$A = [I + fC_M(S - I)\{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1} \times (C_M - C_I)C_M^{-1}]^{-1} \quad (8)$$

$$B = [I + C_M(S - I)\{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1} \times (C_M - C_I)C_M^{-1}]^{-1}A \quad (9)$$

ここに I は 4 階の単位テンソルである。記号 ' $\times$ ' は式が連続することを示すため用いたもので、特別な積ではない。

(2) 弾塑性材料の構成則

ここでは、下添え字 i ($i = M, I$) はそれぞれ母材に関する諸量、介在物に関する諸量として表記する。母材・介在物は von Mises の降伏条件に従うものとして、

$$f_i \equiv \sqrt{(J_2)_i} - F_i(\epsilon_i^P) \quad (10)$$

で降伏関数を定義する。ここに $\sqrt{(J_2)_i}$ は相当応力、 ϵ_i^P は平均塑性ひずみである。硬化関数はべき乗の等方硬化則に従うものとして、

$$F_i(\epsilon_i^P) = \frac{1}{\sqrt{3}}\{\sigma_i^Y + h_i(\epsilon_i^{\text{eq}})^{n_i}\} \quad (11)$$

と仮定する。ここに σ_i^Y は単純引っ張り降伏応力、 h_i, n_i は硬化パラメータ、 ϵ_i^{eq} は相当塑性ひずみである。また各材料内部の平均塑性ひずみ増分は、Prandtl-Reuss の関連流れ則の形で式 (10) に対応して

$$\dot{\epsilon}_i^P = \frac{1}{H_i} \frac{\sigma_i' \otimes \sigma_i'}{4(J_2)_i} \quad (12)$$

と与えられるものとする。ここに H_i は式 (10) の微係数テンソルで与えられる硬化係数であり、 σ_i' は相当応力である。 $\otimes$ はテンソル積を表す。

3. 解析結果

(1) 巨視的な初期降伏関数形

巨視的な初期降伏は、材料のどちらかが降伏すると同時に起こるものとして考え、母材が先に降伏する場合は式(6)と式(10)を用いて、

$$\bar{f} = \sqrt{\frac{1}{2} \bar{\sigma} W \bar{\sigma}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_M^Y \quad (13)$$

と表すことができ、介在物の形状が球体でない場合は、一般的な異方性材料の降伏関数と同型になる。ここに W は、

$$W_{ijkl} = A_{mnij} A_{mnkl} - \frac{1}{3} A_{ppij} A_{qqkl} \quad (14)$$

と応力集中係数 A で表せる。介在物が先に降伏する場合は式(7)と式(10)を用いて、応力集中係数 B で表せる。

(2) 巨視的な初期降伏曲面の形状

介在物の半径を $a_i (i = 1, 2, 3)$ とし、その3主軸方向に x_i 軸を置く。ここでは介在物の形状を $a_1 = a_2$ とし、母材が先に降伏する材料の場合を示す。単体の場合の降伏曲面の形状は開いた円柱となり、その中心軸の方向は $n = (1, 1, 1)^t$ となるため静水圧は降伏に影響しない。ところが介在物の存在により、その形状が球体以外の場合の複合材料の巨視的降伏曲面の形状は、一般的に開いた楕円柱になり、その中心軸は単体の場合より傾く。

$\bar{\sigma}_3$ に一致させて ζ 軸をとり、 $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3$ 方向に垂直に交わる π 平面 (η, ζ) に投影すると降伏関数は

$$\frac{\eta^2}{(\sigma_M^Y/a)^2} + \frac{(\zeta - \beta \bar{p})^2}{(\sigma_M^Y/b)^2} = 1 \quad (15)$$

となる。ここに $\bar{p} (= \bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_3)$ は静水圧で、各係数は

$$\begin{aligned} a &= (A_{11} - A_{12}) \sqrt{3/2} \\ b &= (A_{11} + A_{12} - 2(A_{31} + A_{13} - A_{33})) / \sqrt{6} \\ \beta &= \sqrt{2} (1 - 3/(\alpha + 2)) \\ \alpha &= (A_{11} + A_{12} - 2A_{31}) / (A_{13} - A_{33}) \end{aligned}$$

となり、すべて応力集中係数 A の成分で表すことができる。 π 平面上での降伏曲面の楕円の半径は a, b により決まるため、 a, b は異方性を表すパラメータとみなせる。

また降伏曲面の楕円柱の中心軸の方向は、

$$n' = \{1, 1, \alpha\}^t \quad (16)$$

となるため、静水圧が降伏に影響する。式(15)からもわかるようにその影響の大きさは β によって決まるため、 β は静水圧の影響を表すパラメータとみなすことができる。

(3) 数値解析例

ここでは、介在物の形状等が巨視的初期降伏曲面に及ぼす影響を示す。介在物のヤング率を母材のヤング率の10倍、各材料のポアソン比を $\nu_M = \nu_I = 0.2$ 、母材の降伏応力を

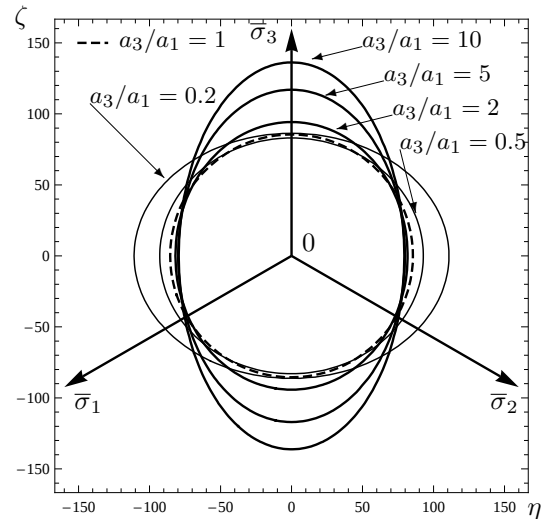


図-1 介在物の半径比に伴う π 平面上の降伏曲面の変化

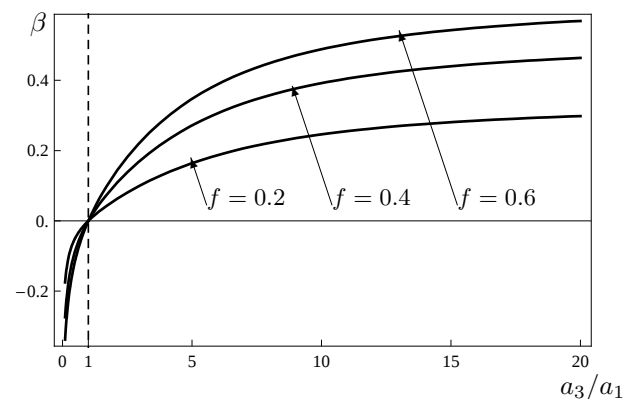


図-2 介在物の半径比に伴う静水圧の影響の変化

$\sigma_M^Y = 90$ とする。介在物の体積比率を $f = 0.2$ 、介在物の半径比 $a_3/a_1 (a_1 = a_2)$ を $0.2, 0.5, 1, 2, 5, 10$ とし、原点を通る π 平面上の巨視的初期降伏曲面を図-1 に示す。介在物の形状が x_3 方向に大きくなるに従い、 $-\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2$ 方向の強度が弱くなり、巨視的に $\bar{\sigma}_3$ 方向に強い材料になる。図-2 は a_3/a_1 の変化に伴う静水圧の影響の大きさ β を、介在物の体積比率 $f = 0.2, 0.4, 0.6$ の場合で示したものである。介在物の体積比率が増加すると静水圧の影響も大きくなることから分かる。 $a_3/a_1 = 1$ では、介在物は球体であるため等方材料となり静水圧に影響されない。 $a_3/a_1 > 1$ の場合は、介在物の形状が x_3 方向に大きくなるに従い巨視的降伏曲面の楕円柱の中心軸が $\bar{\sigma}_3$ 方向に強くなるように傾くため、静水圧の影響も介在物の半径比により増加する。 $a_3/a_1 < 1$ の場合は、介在物の半径比により静水圧の影響は $-\bar{\sigma}_3$ 方向に増加する。つまり、静水圧が発生するに従い $\bar{\sigma}_3$ 方向の強度は弱くなるが、 $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2$ 方向の引張りに強い材料となる。

参考文献

- 1) Mori, T. and Tanaka, K. : Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions, *Act. Metall.*, Vol.21, pp.571-574, 1973.
- 2) Mura, T. : *Micromechanics of Defects in Solids*, Martinus Nijhoff Publ, 1982.
- 3) Eshelby, J. D. : The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems, *Proc. Roy. Soc. London.*, Vol.A241, pp.376-396, 1957.