演算子積分時間領域境界要素法による 二次元非定常熱伝導解析

○　福井大学大学院　学生会員　瀬川 尚揮
福井大学大学院　正会員　斎藤 隆泰
福井大学大学院　正会員　福井 卓雄

1.　はじめに

これまで, 境界要素法における時間領域解法では, 時・空間について離散化を行い, 各時刻の解をそれ以前の境界データから求める時間領域境界要素法が用いられてきた. しかしながら, そのような従来の手法では, 時間増分 Δt を慎重に決定しなければ, 解が不安定になるということが知られている. これは, 時間領域境界積分方程式の中に現れる, 時間に関する繰込み積分の計算に起因するものである.

そこで, 近年, 繰込み積分を精度良く, かつ安定に計算するため, Lubich によって提案された演算子積分法 [1] を境界要素法へ適用した演算子積分時間領域境界要素法が研究されている.

本報告では, この演算子積分時間領域境界要素法を用いた二次元非定常熱伝導問題について述べる. 以下では, まず演算子積分法とその境界要素法への適用方法について述べる. 最後に数値解析例を示し, 本手法の有効性について検討する.

2.　演算子積分法

Lubich は繰込み積分 $f(t)*g(t)$ を時間依存の関数 $f(t-\tau)$ のラプラス変換を用いて離散化近似する手法を提案した. 一般的に繰込み積分は次のように表される.

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad t\geq 0 \tag{1}$$

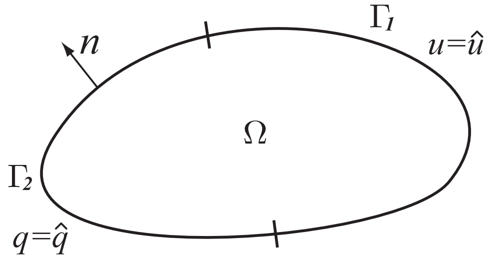
ここに, $*$ は繰込み積分を表す. 演算子積分法では, 時間 t を時間増分 Δt を用いて N ステップに分割することにより, 式 (1) における繰込み積分を次のように近似する.

$$f(n\Delta t)*g(n\Delta t)\simeq\sum_{k=0}^{n}\omega_{n-k}(\Delta t)g(k\Delta t),\quad (n=0,1,\cdots,N) \tag{2}$$

ここに, $\omega_n(\Delta t)$ は重み関数であり, 次のように表される.

$$\omega_n(\Delta t)\simeq\frac{\rho^{-n}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}F\left(\frac{\gamma(z_l)}{\Delta t}\right)e^{-i\frac{2\pi ln}{L}} \tag{3}$$

ここに, F は時間依存の関数 f のラプラス変換である. また, $\gamma(z_l)$ は線形マルチステップ法 (差分法) における生成多項式の商であり, $z_l=\rho e^{i2\pi l/L}$ によって表される. パラメータ ρ は $\rho^L=\sqrt{\epsilon}$ により決定され, L は定数, ϵ は目標とする精度である.



図–1 解くべき問題

3.　非定常熱伝導問題における時間領域境界要素法の定式化

図-1 に示すような二次元非定常熱伝導問題を考える. ここで, 扱うべき支配方程式, 及び境界条件・初期条件は次のように表される.

$$\nabla^2 u=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t} \tag{4}$$

$$u=\hat{u}\quad\text{on}\quad\Gamma_1,\quad q=\hat{q}\quad\text{on}\quad\Gamma_2,\quad \Gamma_2=\Gamma\backslash\Gamma_1 \tag{5}$$

$$u=u_0\quad\text{on}\quad\Omega \tag{6}$$

ここに, Ω は問題とする領域, Γ はその境界を表す. また, α は温度拡散係数であり, u は温度, q は u の外向き法線方向微分である. $\hat{u},\hat{q}$ は与えられた境界条件であり, u_0 は領域内の初期条件である. この問題の解は, 次の時間領域境界積分方程式を解くことにより求められる.

$$C(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{\alpha}\int_\Omega G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},0)u_0(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\Omega_y+\int_\Gamma G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)*q(\boldsymbol{y},t)\mathrm{d}\Gamma_y-\int_\Gamma S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)*u(\boldsymbol{y},t)\mathrm{d}\Gamma_y \tag{7}$$

ここに, $\boldsymbol{x}$ は観測点, $\boldsymbol{y}$ はソース点と呼ばれる. また, $C(\boldsymbol{x})$ は自由項であり, $\boldsymbol{x}$ が滑らかな境界上なら $1/2$, 領域内部なら 1, それ以外では 0 を取る. $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t), S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ は基本解, 及び対応する二重層核であり, 次のように表される.

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)=\frac{1}{4\pi(t-\tau)}\exp\left\{\frac{-r^2}{4\alpha(t-\tau)}\right\} \tag{8}$$

$$S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)=\frac{-r}{8\pi\alpha(t-\tau)^2}\exp\left\{\frac{-r^2}{4\alpha(t-\tau)}\right\}\frac{\partial r}{\partial n_y} \tag{9}$$

ここに, $r=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ によって定義される. 式 (7) において, 右辺第二項・第三項は繰込み積分を含む. 従来の時間領域境界要素法では, この繰込み積分のために, 時間増分 Δt を慎重に選ばなければ, 時間ステップが増加するとともに解が不安定になるという欠点を持つ.

4.　演算子積分時間領域境界要素法

前節で述べたような欠点を改善するため, 時間領域境界要素法に演算子積分法を適用する. まず, 式 (7) において, 境界を M_Γ 個, 領域内を M_Ω 個の一定要素で離散化し, 数値的に解くことを考える. 時間増分を Δt とし, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ をそれぞれ i, j に対応させて書き直すと, 第 n ステップにおける離散化された時間領域境界積分方程式は, 次のように表される.

$$C_i u_i(n\Delta t) = \frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{M_\Omega} \bar{A}_{ij} u_{0j} + \sum_{j=1}^{M_\Gamma}\sum_{k=1}^{n}\left[A_{ij}^{n-k} q_j(k\Delta t) - B_{ij}^{n-k} u_j(k\Delta t)\right] \quad (10)$$

ここに, $\bar{A}_{ij}, A_{ij}^m, B_{ij}^m$ は影響関数であり, それぞれ次のように表される.

$$\bar{A}_{ij} = \int_\Omega G(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_j, 0)\mathrm{d}\Omega_y \quad (11)$$

$$A_{ij}^m = \frac{\rho^{-m}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\int_\Gamma \hat{G}(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_j, s_l) e^{-i\frac{2\pi ml}{L}}\mathrm{d}\Gamma_y \quad (12)$$

$$B_{ij}^m = \frac{\rho^{-m}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\int_\Gamma \hat{S}(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_j, s_l) e^{-i\frac{2\pi ml}{L}}\mathrm{d}\Gamma_y \quad (13)$$

ここに, $s_l = \gamma(z_l)/\Delta t$ で定義される. 式 (12),(13) はそれぞれ離散フーリエ変換の形で表されているため, FFT を利用することにより高速に計算することができる. また, $\hat{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, s_l), \hat{S}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, s_l)$ は, ラプラス変換域の基本解, 及び対応する二重層核であり, 次のように表される.

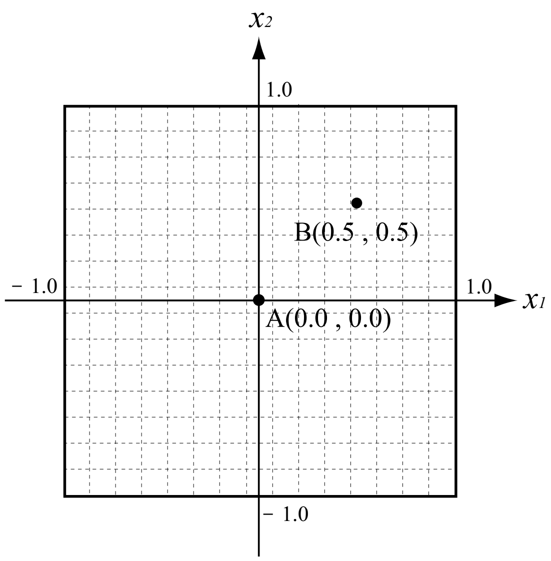
$$\hat{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, s) = \frac{1}{2\pi}K_0(\kappa r) \quad (14)$$

$$\hat{S}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, s) = -\frac{\kappa}{2\pi}K_1(\kappa r)\frac{\partial r}{\partial n_y} \quad (15)$$

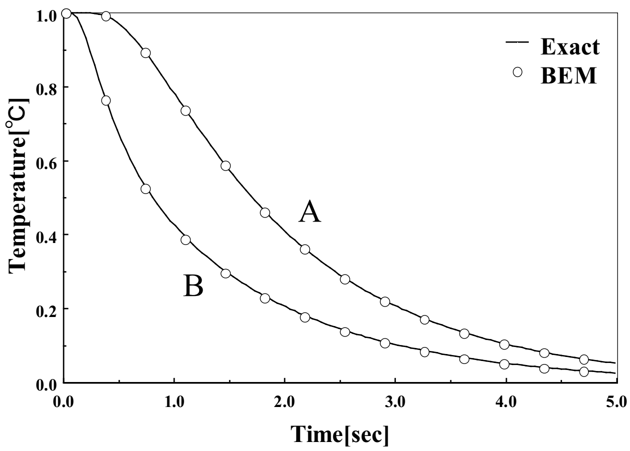
ここに, $\kappa = \sqrt{s/\alpha}$ であり, K_n は n 次の第 2 種変形ベッセル関数である. 尚, 式 (7) における右辺第一項は繰込み積分ではないため, 影響関数 $\bar{A}$ は時間領域の基本解を用いて計算する. 式 (8),(14),(15) を用いて影響関数 (11),(12),(13) を計算し, 境界条件を考慮の下に式 (10) を逐次的に解くことにより, 境界上の未知量を決定することが出来る.

5.　数値解析例

図-2 に示すような, 一辺が 2.0[m] の正方領域における二次元非定常熱伝導問題を考える. 温度拡散係数 $\alpha = 0.139[\mathrm{m}^2/\mathrm{sec}]$ とし, 境界条件は全ての境界上において $u = 0.0$[℃], 領域内部の初期温度は $u_0 = 1.0$[℃] を与える. 境界上は一定要素を用い, 一辺を 15 個に分割し, 領域内部は四角形の一定要素を用い, 15×15 の計 225 個に分割した. また, $L = N = 512, \epsilon = 10^{-20}$ とし, 時間増分 $\Delta t = 0.02$[sec] とした. 図-3 は, 図-2 における点 A$(0.0, 0.0)$, 及び点 B$(0.5, 0.5)$ における温度の時刻歴を, 解析解 [2] と比較したものである.



図–2 問題とする領域とその要素分割



図–3 点 A, 点 B における温度の時刻歴

両者はよく一致していることから, 本手法の精度が高いことがわかる. 尚, 本解析では影響関数 A^0, 及び B^0 に対し, $r^2/\alpha \leq \Delta t$ を指標とした切捨てを行い, 記憶容量の削減を図った.

6.　おわりに

二次元非定常熱伝導問題における時間領域境界要素法に対し, 演算子積分法を適用した. また, 数値解析によって得られた解と解析解を比較するこにより, 本手法の有効性について示した.

しかしながら, 本手法では領域積分が必要となり, 境界要素法の利点を生かしきれていない. よって今後は, 領域積分項の効率的な取り扱いについて, またそれと共に, 赤外線サーモグラフィーを用いた非破壊検査シミュレーションを行うことも視野に入れ, 研究を進める予定である.

References

1) Lubich, C. : Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Numer. Math.*,**52**, pp 129-145, 1988
2) Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C. : Conduction in Solids, Oxford Univ. Press, pp 173, 1959