

演算子積分法を用いた時間領域境界要素法による4群中性子拡散解析

福井大学大学院

○ 山口 潤

福井大学大学院 正 会 員

福井 卓雄

1 はじめに

Lubich による演算子積分法は各種の時間領域境界要素法を定式化する際の強力な手法である。その特徴としては、離散化された境界要素法の安定性が良いこと、時間領域問題の特異解の Laplace 変換だけを用いるので、基本解が閉じた形で決定できない問題も容易に定式化できることなどが挙げられる。

本論文では、Lubich の演算子積分法を用いた時間領域境界要素法により、4 群中性子拡散解析を行い、本手法の適用性を広げることを目的とする。

2 4 群中性子拡散方程式と解の積分表現

本論文において、4 群中性子拡散方程式を以下のように表記する。

$$(\delta_{ij}\nabla^2 - A_{ij} + B_{ij})\phi_j = \frac{1}{C_{ij}}\frac{\partial\phi_j}{\partial t}, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (1)$$

ただし、添字については総和規約を適用するものとする。すなわち、繰り返される添字については $j = 1, 2, 3, 4$ の和を取る。ここに、 B_{ij} は次式により定義される。

$$B_{ij} = \frac{1}{D_i} \left(\Sigma_{j \rightarrow i} + \chi_j \nu \Sigma_f^j \right) \quad (2)$$

ここで、 Σ_f^j は j 群の群平均巨視的断面積、 ν は核分裂一回で発生する中性子の平均個数、 χ_j は j 群にエネルギーを持って発生する核分裂中性子の平均個数、 D_i は群拡散係数である。ただし、下方散乱を定義しているため、 $\Sigma_{j \rightarrow i}$ ($j \geq i$) である。また、 A_{ij} および C_{ij} は対角行列であり、それぞれ

$$A_{ii} = A_i = \frac{1}{D_i} \left(\Sigma_{ai} + \sum_{j=i+1}^N \Sigma_{i \rightarrow j} \right) \quad (3)$$

$$C_{ii} = C_i = \frac{1}{v_i D_i} \quad (4)$$

で定義する。ただし、この定義においては総和規約は適用しない。

方程式 (1) の初期値境界値問題を解くことを考える。対象とする領域を B 、その境界を ∂B とすると、境界上において、境界値の組 $\phi_j(x, t)$ または $\partial\phi_j(x, t)/\partial n$ のどちらかが与えられているとき、問題の解は

$$\begin{aligned} C(x)\phi_i(x, t) = & \int_{\partial B} G_{ij}(x, y, t) * \frac{\partial\phi_j(y, t)}{\partial n} dS_y \\ & - \int_{\partial B} S_{ij}(x, y, t) * \phi_j(y, t) dS_y \\ & + \int_B G_{ij}(x, y, t)\phi_j(x, 0) dV_y \end{aligned} \quad (5)$$

となる。ここに $C(x)$ は自由項であり、 G_{ij} は基本解である。また、 S_{ij} は二重層核であり、次式で表される。

$$S_{ij}(x, y, t) = \frac{\partial G_{ij}(y, x, t)}{\partial n_y} \quad (6)$$

3 演算子積分法による境界要素法の定式化

Lubich は、繰り込み積分

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt \quad (x \geq 0) \quad (7)$$

の離散化繰り込み積

$$\sum_{j=0}^N \omega_j(\Delta t)g(x-j\Delta t) \quad (8)$$

における重み ω_j を

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} F\left(\frac{\delta(\zeta)}{\Delta t}\right) \zeta^{-n-1} d\zeta \\ &\simeq \frac{\rho^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} F\left(\frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\right) e^{-2\pi i n l/L} \end{aligned} \quad (9)$$

によって与える方法を提案した。ここに、 F は f の Laplace 変換であり、 $\delta(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j \zeta^j$ は差分法 (線形多段解法) における生成多項式の商である。また、 $\zeta_l = \rho e^{2\pi i l/L}$ であり、 $\rho < 1$ は要求される精度により決定される。

(5) の繰り込み積分について Lubich の演算子積分法を用いて時間域の離散化を行うと、(8) より

$$\begin{aligned} G_{ij}(x, y, t) * \frac{\partial\phi_j(y, t)}{\partial n} \\ \simeq \sum_{k=1}^n G_{\omega}(x, y, (n-k)\Delta t) \frac{\partial\phi_j(y, k\Delta t)}{\partial n} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} S_{ij}(x, y, t) * \phi_j(y, t) \\ \simeq \sum_{k=1}^n S_{\omega}(x, y, (n-k)\Delta t) \phi_j(y, k\Delta t) \end{aligned} \quad (11)$$

となる。ここに、重み $G_\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$, $S_\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ は基本解および二重層核の Laplace 変換 $\hat{G}_{ij}$, $\hat{S}_{ij}$, ($m = 0, \dots, L-1$) を用いて (9) より

$$G_\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, m\Delta t) = \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \hat{G}_{ij} \left(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t} \right) e^{-2\pi i m l / L} \quad (12)$$

$$S_\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, m\Delta t) = \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \hat{S}_{ij} \left(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t} \right) e^{-2\pi i m l / L} \quad (13)$$

となる。空間においての近似を導入するために、境界関数を近似基底 β_i ($i = 1, \dots, M$), 領域関数を近似基底 $\bar{\beta}_i$ ($i = 1, \dots, M_B$) により近似して

$$\phi(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_i^M \beta_i(\mathbf{x}) \phi_i(t) \quad (14)$$

$$J(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial n} \simeq \sum_i^M \beta_i(\mathbf{x}) J_i(t) \quad (15)$$

とおく。境界積分方程式 (5) に (10), (11), (14), (15) を代入し、重み (12), (13) を参照すれば、(5) の離散化方程式

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}, n\Delta t) &\simeq \sum_i^M \sum_{k=1}^n A_i^{n-k}(\mathbf{x}) J_i(k\Delta t) \\ &\quad - \sum_i^M \sum_{k=1}^n B_i^{n-k}(\mathbf{x}) \phi_i(k\Delta t) \\ &\quad + \sum_i^{M_B} \bar{A}_i(\mathbf{x}) \phi_i(0) \end{aligned} \quad (16)$$

が得られる。ここで、近似基底として一定要素

$$\beta_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & (\mathbf{x} \in E_i) \\ 0 & (\text{other}) \end{cases} \quad (17)$$

$$\bar{\beta}_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & (\mathbf{x} \in \bar{E}_i) \\ 0 & (\text{other}) \end{cases} \quad (18)$$

を用いると (16) の左辺は

$$C(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}, n\Delta t) = \phi(\mathbf{x}_i, n\Delta t), \quad (\mathbf{x}_i \in B) \quad (19)$$

$$C(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}, n\Delta t) = \frac{1}{2} \phi_i(n\Delta t), \quad (\mathbf{x}_i \in \partial B) \quad (20)$$

となり、影響関数 A_i^m , B_i^m , $\bar{A}_i^m$ ($m = 0, \dots, L-1$) は

$$A_i^m(\mathbf{x}) = \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[\int_{E_i} \bar{G} \left(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t} \right) dS_y \right] e^{-2\pi i m l / L} \quad (21)$$

$$B_i^m(\mathbf{x}) = \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[\int_{E_i} \bar{S} \left(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t} \right) dS_y \right] e^{-2\pi i m l / L} \quad (22)$$

$$\bar{A}_i^m(\mathbf{x}) = \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[\int_{\bar{E}_i} \bar{G} \left(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t} \right) dV_y \right] e^{-2\pi i m l / L} \quad (23)$$

となる。ここに、 E_i , $\bar{E}_i$ はそれぞれ、 i 番目の境界要素および領域要素であり、 $\mathbf{x}_i$ は選点を表す。

離散化方程式 (16) を逐次的に解くことで 4 群中性子拡散方程式 (1) の初期値境界値問題の解を得る。

4 連立境界積分方程式の基本解

連立微分方程式 (1) を時間域で Laplace 変換し、空間域で Fourier 変換することによって次式を得る。

$$(-\delta \xi^2 - \bar{A}_{ij} + B_{ij}) \tilde{\phi}_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (24)$$

$$\bar{A}_i = A_i + \frac{p}{v_i D_i} = \frac{1}{D_i} \left(\Sigma_{ai} + \sum_{j=i+1}^N \Sigma_{i \rightarrow j} + \frac{p}{v_i} \right)$$

ここに、 p は Laplace 変換のパラメータであり、 $\tilde{\phi}$ は ϕ の Laplace 変換をさらに Fourier 変換したものである。Hölmänder の方法を用いると、Fourier 変換域での連立方程式の基本解は ξ^2 に関する 4 次方程式の根 γ_i^2 ($i = 1, 2, 3, 4$) を用いて次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_j(\xi, \gamma) &= \frac{M_1}{\xi^2 + \gamma_1^2} + \frac{M_2}{\xi^2 + \gamma_2^2} \\ &\quad + \frac{M_3}{\xi^2 + \gamma_3^2} + \frac{M_4}{\xi^2 + \gamma_4^2} \end{aligned} \quad (25)$$

(25) を逆 Fourier 変換することにより、Laplace 変換域での基本解が得られる。2 次元の場合は次式ようになる。

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_j &= \frac{1}{2\pi} \left(M_1 K_0(\gamma_1 r) + M_2 K_0(\gamma_2 r) \right. \\ &\quad \left. + M_3 K_0(\gamma_3 r) + M_4 K_0(\gamma_4 r) \right) \end{aligned} \quad (26)$$

ここに、 $r = x_i x_i$ であり、 K_n は第 2 種変形 Bessel 関数である。(24) の作用素行列の余因子を $X_{ij} = N_1(\xi^2)^3 + N_2(\xi^2)^2 + N_3\xi^2 + N_4$ とすると、定数 M_1, M_2, M_3, M_4 は次式ようになる。

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{\gamma_1^6 N_1 + \gamma_1^4 N_2 + \gamma_1^2 N_3 + N_4}{(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)(\gamma_1^2 - \gamma_3^2)(\gamma_1^2 - \gamma_4^2)}, \\ M_2 &= \frac{\gamma_2^6 N_1 + \gamma_2^4 N_2 + \gamma_2^2 N_3 + N_4}{(\gamma_2^2 - \gamma_3^2)(\gamma_2^2 - \gamma_4^2)(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)}, \\ M_3 &= \frac{\gamma_3^6 N_1 + \gamma_3^4 N_2 + \gamma_3^2 N_3 + N_4}{(\gamma_3^2 - \gamma_4^2)(\gamma_3^2 - \gamma_1^2)(\gamma_3^2 - \gamma_2^2)}, \\ M_4 &= \frac{\gamma_4^6 N_1 + \gamma_4^4 N_2 + \gamma_4^2 N_3 + N_4}{(\gamma_4^2 - \gamma_1^2)(\gamma_4^2 - \gamma_2^2)(\gamma_4^2 - \gamma_3^2)} \end{aligned} \quad (27)$$

5 おわりに

数値解析例は当日示す。今後の研究として、本手法を用いた N 群中性子拡散解析、高速多重極境界要素法の適用等を考えている。

参考文献

- [1] C.Lubich : Convolution quadrature and discretized operational calculus, *Mumer. Math.*, 52, pp.129-145, 1998.
- [2] 福井 卓雄 : 演算子積分法による中性子拡散問題の時間領域境界要素法, 計算力学講演会論文集, 12, pp.861-864, 2007.