均衡制約付数理計画問題(MPEC)のための最適化手法に関する研究

金沢大学工学部　土木建設工学科　学生員　○穴口　智也
金沢大学大学院　自然科学研究科　正会員　中山晶一朗
金沢大学大学院　自然科学研究科　フェロー　高山　純一

1. はじめに

最適化問題(Optimization Problem)は，与えられた制約条件の下で何らかの目的関数を最小もしくは最大にするような解を求める問題であり，従来から経営学やオペレーションズリサーチの中心テーマであったが，今日では計算機技術の進捗によって自然科学，工学，社会科学などの幅広い分野に浸透，利用されている．この中で有限次元ベクトル空間，すなわち扱う変数の数が有限個かつ与えられる条件の数も有限個の場合における最適化問題を総称して数理計画問題(Mathematical Programming Problem)という．さらに均衡問題を制約条件として組み合わせた数理計画問題を MPEC(Mathematical Problem with Equilibrium Constraints)といい，交通・地域政策問題への応用，例えば都市鉄道整備における費用負担スキームや道路混雑料金の設定などにも用いられている．

これらの最適化問題を解く代表的な手法として，最急降下法やニュートン法，共役勾配法，GA(遺伝的アルゴリズム)などが挙げられる．これらの最適化手法には収束が早い，大域的収束性が保証されないなどそれぞれ長所・短所があり，目的関数の線形性や制約条件の有無などで使い分けられ，時には組み合わせられる事もある．

最適化問題の交通分野における例として，交通ネットワーク均衡モデルのパラメータ推定が挙げられる．中山，高山[1)]はネットワーク均衡モデルにおけるパラメータ推定において，最尤推定法を用いてリンク間交通量の相関を考慮した交通ネットワーク均衡モデルのパラメータ推定法を提案している．ネットワーク均衡モデルにおけるパラメータ推定には主に最小自乗法が用いられるが，最小自乗法を用いる際にはリンク間交通量は独立であるという前提条件があるためにリンク交通量の相関等の観点から理論上問題であり，推定したパラメータにバイアスが含まれる可能性もあるとしている．さらにこの研究では最尤推定法によるパラメータ推定に関して，確率ネットワーク均衡を下位問題としたMPECとして定式化している．

また，山下[2)]は非線形効用関数を持つロジットモデルを構築する際，パラメータ推定に焼きなまし法(Simulated Annealing, SA)を利用している．非線形効用関数を持つロジットモデルでは一般に尤度関数が凸関数であるとは限らないため，パラメータを求めるために通常用いられる最急降下法やニュートン法などでは局所解に陥ってしまう可能性があり，適切にパラメータを推定することができない．そのような観点から，焼きなまし法を利用したパラメータ推定手法を適用している．

Connors，Smithら[3)] はネットワーク均衡モデルにおける通行料金の二段階最適化において，制約条件がある場合でも目的関数に制約に関する項を付け加えることによって制約条件がない問題として最適化を行う手法についての提案を行っている．

本研究では，MPEC のための 1 つの最適化手法の構築・提案を目的とする．具体的にはいくつかの最適化手法を組み合わせることによってより精度の高い，すなわち目的関数や制約条件に左右されることなく大域的最小解への収束（最小化問題の場合）を可能とする最適化手法の構築を目指すものである．今回は簡単な仮想ネットワーク，さらには大規模道路ネットワークを用いて実際にパラメータ推定を行い，構築した最適化手法の有意性を示すこととする．

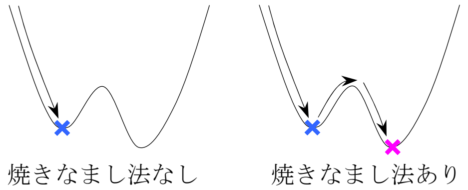
2. 本研究の方針

(1) 焼きなまし法の利用

最適化手法に関する研究は数多くあるが，本研究では前章に挙げた既存研究に用いられている手法・提案を組み合わせることによって，MPEC を解くための最適化手法の構築を目指すこととする．

山下の研究で用いられている焼きなまし法を応用する．ここで，焼きなまし法とは金属を急激に冷やして分子の動きを活発にし，その後ゆっくりと冷やしていくことによってより安定した金属を作る，焼きなましの概念を摸擬することにより確率的なゆらぎを導入した最適化手法である．パラメータを推定する際に，通常は目的関数の変数による微分の値を修正量として利用しているが，焼きなまし法はさらに乱数を修正量として加えることによって確率的なゆらぎを導入し，局所解（局所的最小解）からの脱出を可能としている．**図-1** のように目的関数を最小化させる問題の場合，最急降下法やニュートン法では左図のように最適解ではない局所解に収束してし

まう可能性があるが，焼きなまし法によるゆらぎを導入することによって右図のように局所解から脱出し，最適解（大域的最小解）に辿り着かせることが可能となる．



図−1　焼きなまし法の概念図

今回構築した計算式はパラメータをθ，目的関数を$f(\theta)$として式(3.1)に示す通りである．

$$\theta_h = \theta_{h-1} + \alpha \frac{\partial f(\theta_{h-1})}{\partial \theta} + \varepsilon \tag{3.1}$$

ここでαはステップサイズ（学習率），εはゆらぎ項である．式(3.1)の十分な反復によって最適パラメータθを得ることができる．ただしステップサイズαに関して，直線探索法のアルミホ条件

$$f\left(\theta_{h-1} + \alpha \frac{\partial f(\theta_{h-1})}{\partial \theta}\right) - f(\theta_{h-1}) \le \alpha\beta \nabla f(\theta_{h-1})^{\mathrm{T}} \frac{\partial f(\theta_{h-1})}{\partial \theta} \tag{3.2}$$

を満たすようなαを反復計算毎に求め，更新する．ここでβは$0 < \beta < 0.5$を満たすパラメータであり，実際の計算では十分小さな数，例えば$\beta = 10^{-3}$としておけば十分である．またゆらぎ項εは以下の式で表すこととする．

$$\varepsilon = \gamma \times \sqrt{T(s)} \tag{3.3}$$

ここでγは標準正規分布（平均値 0，標準偏差 1）に従う正規乱数，$T(s)$は温度減少関数，sは反復計算回数である．さらに，温度減少関数$T(s)$にはSzu，Hartley[4]が提案した以下の式を用いる．

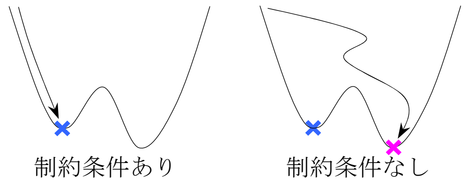
$$T(s) = \frac{T(0)}{1+s} \tag{3.4}$$

ここで$T(0)$は初期温度であり，任意定数である．

Geman，Geman[5]は十分にゆっくり冷やすことによって確率1で最適解に到達することを証明している．これを受けて，初期温度$T(0)$を上手に設定することによって**図−1** のような簡単な目的関数の最適化問題であれば式(3.1)によりほぼ確率 1 で最適解に到達させられることを実際に確認済みである．

(2) 目的関数の設定 − 制約条件の取り扱い

目的関数の設定には Connors，Smith らの研究による制約条件を目的関数に埋め込む手法を取り入れる．この手法の概略図を**図−2** に示す．**図−1** と同様に目的関数を最小化させる問題を考えると，均衡制約条件がある場合，従来は左図のようにその制約条件上で最適化を行っていたが，この手法では問題とする関数に制約に関する項を付け加え，制約条件のない問題として解くことによって右図のように直接最適解へ向かうことを期待している．



図−2　制約条件の有無

3. おわりに

本研究では焼きなまし法を用いた最適化手法の提案を行った．仮想ネットワークにおけるパラメータの推計結果，および大規模道路ネットワークにおけるパラメータの推定結果は講演時に報告する．

図−3　大規模ネットワークの一例（金沢市道路ネットワーク）

＜参考文献＞

1) 中山晶一朗，高山純一：「リンク交通量を用いた交通ネットワーク均衡モデルのパラメータ推定：リンク間相関を考慮した最尤法」土木学会論文集 D, Vol.62 No.4, pp.548-557, 2006.

2) 山下裕一朗，中山晶一朗，高山純一，内山久雄：「非線形効用関数をもつロジットモデルの構築」平成 15 年度土木学会中部支部研究発表会講演概要集, pp.285-286, 2004.

3) Connors,R., Smith,M.J. and Watling,D.:「Bilevel Optimisation of Prices in Network Equilibrium Models」Mathematics in Transport, ELSEVIER LIMTED, pp.27-43, 2007.

4) Szu,H. and Hartley,R.:「Fast simulated annealing」Physics Letters A, Vol. 122, pp. 167-162, 1987.

5) Geman,S. and Geman,D.:「Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian Restorarion of Images」 IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol.Pami-6, No.6, pp.721-741, 1984.

6) J.ホロムコヴィッチ（和田幸一，増澤利光，元木光雄訳）：「計算困難問題に対するアルゴリズム理論」シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社, 2005.

7) 矢部　博：「工学基礎　最適化とその応用」数理工学社, 2006.