

境界要素法を用いた1群中性子拡散問題の3次元解析

福井大学 ○ 瀬川 尚揮
福井大学大学院 正会員 福井 卓雄

1 はじめに

本解析では中性子拡散現象を数値解析するにあたり、原子炉内の中性子密度の時間変化を拡散近似を用いて表した中性子拡散方程式を用いる。また、この中性子拡散方程式を定式化し、時間領域境界要素法によって解析する。扱う問題は1群中性子拡散方程式であり、定式化の際にはLubichによって提案された演算子積分法[1]を適用することにより、定式化を容易なものとしている。

2 演算子積分法

演算子積分法[1]とは繰込み積分

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt \quad (x \geq 0)$$

の近似値を、離散化繰込み積分

$$\sum_{j=0}^N \omega_j(\Delta t)g(x-j\Delta t)$$

により計算する場合の重みを適切に計算する方法である。そしてその重み ω_j は、

$$\omega_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} F\left(\frac{\delta(\zeta)}{\Delta t}\right) \zeta^{-n-1} d\zeta \simeq \frac{\rho^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} F\left(\frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\right) e^{-2\pi i n l/L} \quad (1)$$

によって得られる。ここで F は f の Laplace 変換であり、 $\delta(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j \zeta^j$ は線形多段階法(差分法)における生成多項式の商である。また、積分路の離散化において $\zeta_l = \rho e^{2\pi i l/L}$ とし、 $\rho < 1$ は要求される精度によって決定されるパラメータである。

3 1群中性子拡散方程式と解の積分表現

原子炉内における中性子の振舞いを解析する際には、中性子が炉内の原子核との相互作用により消滅・生成すること。また、相互作用の起こる確率が中性子の持つエネルギーに依存することを考慮しなければならない。

しかし、本解析で用いる1群中性子拡散方程式は、各相互作用確率が中性子のエネルギーに依存せず一定としたものであり、その式は

$$(\nabla^2 - \alpha^2 + \beta^2)\phi = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2)$$

となる。ここで $\phi(\mathbf{x}, t)$ は中性子束である。また α^2 , β^2 は拡散物質の消滅と生成の割合を表し、 ϕ に比例する。これらと γ^2 は一般的には位置 $\mathbf{x}$ に依存する関数であるが、ここでは定数と仮定した。

また、原子炉倫理における1群中性子拡散方程式は

$$D\nabla^2\phi - \Sigma_a\phi + P = \frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

である。ここで D は拡散係数、 Σ_a はマクロ吸収断面、 v は中性子速さである。 P は中性子生成項であるが、中性子が核分裂反応に由来する即発中性子のみと仮定すると、中性子生成項は

$$P = \nu\Sigma_f\phi$$

となる。ここで ν は1核分裂当たりの平均発生中性子数、 Σ_f はマクロ核分裂断面積である。

このとき、(2) の各係数は

$$\alpha^2 = \frac{\Sigma_a}{D} = \frac{1}{L^2}, \quad \beta^2 = \frac{\nu\Sigma_f}{D} = \frac{\eta f}{L^2}, \quad \gamma^2 = D\nu$$

となる。ここで $L^2 = D/\Sigma_a$ は拡散面積であり、 η は燃料に吸収された中性子 1 個あたりの発生核分裂中性子数、 f は燃料利用率である。

また、本解析では式 (2) を拡張した方程式

$$(\nabla^2 - \alpha^2 + \beta^2)\phi + s = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3)$$

を用いる。ここで s は中性子束の変化に全く関係しない独立中性子源である。

ここで、方程式 (3) の初期値境界値問題を解くことを考える。対象とする領域を B 、その境界を ∂B とし、境界上において境界値 $\phi(\mathbf{x}, t)$ または $\partial\phi(\mathbf{x}, t)/\partial n$ のどちらかが与えられているとする。また、ここでは外挿距離を 0 と考えることにする。この問題の解は、境界値、中性子発生源および初期値の線込み積の形で

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}, t) = & \int_{\partial B} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * \frac{\partial\phi(\mathbf{y}, t)}{\partial n} dS_y - \int_{\partial B} S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * \phi(\mathbf{y}, t) dS_y \\ & + \int_B G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * s(\mathbf{y}, t) dV_y + \int_B G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\phi(\mathbf{y}, 0) dV_y \end{aligned} \quad (4)$$

と表すことができる。ここで $C(\mathbf{x})$ は自由項であり、 $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ は基本解および二重層核である。

4 演算子積分境界要素法

境界方程式 (4) の線込み積を離散化する。和の重みを計算するには (1) より、基本解の Laplace 変換が必要である。

1 群拡散方程式 (3) の Laplace 変換は

$$\left[\nabla^2 - \left(\alpha^2 - \beta^2 + \frac{s}{\gamma^2} \right) \right] \hat{\phi}(\mathbf{x}, s) = [\nabla^2 - \kappa(s)^2] \hat{\phi}(\mathbf{x}, s) = 0$$

となる。ここで $\hat{\phi}$ は ϕ の Laplace 変換であり、 $\kappa^2 = \alpha^2 - \beta^2 + s/\gamma^2$ と定義した。また s は複素数なので、 κ もまた複素数である。この式における基本解および二重層核は、3 次元問題のとき

$$\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = \frac{e^{-\kappa r}}{4\pi r}, \quad \hat{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = \frac{\partial \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)}{\partial n_y} = -\frac{(1 + \kappa r)e^{-\kappa r}}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial n_y}$$

となる。ここで $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ とおいた。

この式を演算子積分法を用いて時間領域の離散化を行うと

$$C(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}, n\Delta t) \simeq \sum_i^M \sum_{k=1}^n A_i^{n-k}(\mathbf{x}) J_i(k\Delta t) - \sum_i^M \sum_{k=1}^n B_i^{n-k}(\mathbf{x}) \phi_i(k\Delta t) + \sum_i^{M_B} \sum_{k=1}^n \bar{A}_i^{n-k}(\mathbf{x}) s_i(k\Delta t) + \sum_i^{M_B} \bar{A}_i^n(\mathbf{x}) \phi_i(0)$$

となる。ここで $A_i^m, B_i^m, \bar{A}_i^m$ ($m = 0, \dots, L-1$) は影響関数であり、次式で表される。

$$\begin{aligned} A_i^m(\mathbf{x}) &= \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[\int_{\partial B} \hat{G}\left(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\right) \beta_i(\mathbf{y}) dS_y \right] e^{-2\pi i m l / L} \\ B_i^m(\mathbf{x}) &= \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[\int_{\partial B} \hat{S}\left(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\right) \beta_i(\mathbf{y}) dS_y \right] e^{-2\pi i m l / L} \\ \bar{A}_i^m(\mathbf{x}) &= \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[\int_B \hat{G}\left(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\right) \bar{\beta}_i(\mathbf{y}) dV_y \right] e^{-2\pi i m l / L} \end{aligned}$$

これを逐次的に解くことにより解析結果を得る。現在、解析を進めているところであり、結果の詳細については当日報告する。

参考文献

- [1] C.Lubich : Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Numer. Math.*, **52**, pp. 129-145, 1988
- [2] 福井 卓雄 : 演算子積分法による中性子拡散問題の時間領域境界要素法 計算工学講演会論文集, **12**, pp. 861-864, 2007