演算子積分法を用いた時間領域境界要素法による 3 群中性子拡散解析

福井大学大学院 学生会員 山口 潤
福井大学大学院 正会員 福井 卓雄

1 はじめに

本論文は, Lubich の演算子積分法を用いた時間領域境界要素法により, 3 群中性子拡散解析をすることを目的とし, 3 群中性子拡散方程式の基本解の定式化を行うものである。

中性子の拡散は確率現象であり, 輸送方程式により支配される。輸送方程式を解析する手法としては, モンテカルロ法がよく利用されるが, 解析に膨大な時間を必要とする。拡散方程式は輸送方程式の一つの近似であるが, 扱う領域が原子炉程度の大きさの場合には良い近似を与える。ここでは, 発生項と吸収項をもつ 3 群中性子拡散方程式の時間領域境界要素法を定式化し, 基本解および数値解析例を示す。

2 3 群拡散方程式の解法

中性子拡散解析においては, 中性子の持つエネルギーレベルによって中性子をいくつかの群に分けて, 群相互の連成を考慮に入れて解析を進めるのが通常であり, ここでは, 発生項と吸収項をもつ 3 群中性子拡散方程式の解法について考察する。

2.1 3 群拡散方程式

高エネルギーの中性子 (中性子束 ϕ_1), 中エネルギーの中性子 (中性子束 ϕ_2), 熱中性子 (中性子束 ϕ_3) の 3 群からなる拡散方程式

$$(\nabla^2 - A_{11}) \phi_1 + A_{13} \phi_3 + s = \frac{1}{C_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \quad (1)$$

$$(\nabla^2 - A_{22}) \phi_2 + A_{21} \phi_1 = \frac{1}{C_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \quad (2)$$

$$(\nabla^2 - A_{33}) \phi_3 + A_{31} \phi_1 + A_{32} \phi_2 = \frac{1}{C_3} \frac{\partial \phi_3}{\partial t} \quad (3)$$

について考える。ここに, A_{ij} , C_i は定数であると仮定する。ここでは, 高エネルギー中性子の減速により発生する中エネルギーの中性子, 熱中性子の発生項をそれぞれ $A_{21}\phi_1, A_{31}\phi_1$ とし, 中エネルギー中性子の減速により発生する熱中性子の発生項を $A_{32}\phi_2$ とし, 熱中性子による核分裂で生成される高エネルギーの中性子の発生数を $A_{13}\phi_3$ として, 3 群を連成させている。また, 高エネルギー中性子から高エネルギー中性子の発生, 中エネルギー中性子から中エネルギー中性子の発生, 熱中性子から熱中性子の発生は省略している。s は燃料物質の自然崩壊による中性子発生項である。

2.2 連立積分方程式による境界要素法

本論文では, 連立微分方程式 (1),(2),(3) の基本解の Laplace 変換を求めて ϕ_i を連立方程式の解として求める。境界 ∂B 上において, 境界値の組 $(\phi_i(x, t))$ または $\partial\phi_i(x, t)/\partial n$ のどちらかが与えられているとすると, 連立系の積分方程式は

$$C(x) \begin{pmatrix} \phi_1(x, t) \\ \phi_2(x, t) \\ \phi_3(x, t) \end{pmatrix} = \int_{\partial B} \Gamma(x, y, t) * \begin{pmatrix} \partial\phi_1(y, t)/\partial n \\ \partial\phi_2(y, t)/\partial n \\ \partial\phi_3(y, t)/\partial n \end{pmatrix} dS_y - \int_{\partial B} \Sigma(x, y, t) * \begin{pmatrix} \phi_1(y, t) \\ \phi_2(y, t) \\ \phi_3(y, t) \end{pmatrix} dS_y \\ + \int_B \Gamma(x, y, t) \begin{pmatrix} \phi_1(y, 0) \\ \phi_2(y, 0) \\ \phi_3(y, 0) \end{pmatrix} dV_y + \int_B \Gamma(x, y, t) * \begin{pmatrix} s(y, t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dV_y \quad (4)$$

となる。ここに、 Γ, Σ は、連立方程式系 (1), (2), (3) の基本解および二重層核の行列である。(4) は x を境界に近付けるとき、未知の境界値に対する境界積分方程式となる。

2.3 連立方程式の基本解

連立微分方程式 (1),(2),(3) の基本解は、*Hölmänder* の方法によって求めることができる。連立微分方程式 (1),(2),(3) の同次系の Laplace 変換を行列表示すると

$$\begin{pmatrix} \nabla^2 - \kappa_1^2 & 0 & A_{13} \\ A_{21} & \nabla^2 - \kappa_2^2 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & \nabla^2 - \kappa_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

となる。ここに、 $\kappa_i^2 = A_{ii} + p/C_i$ である。左辺の係数行列 (作用素行列) の行列式は

$$L = (\nabla^2 - \kappa_1^2) (\nabla^2 - \kappa_2^2) (\nabla^2 - \kappa_3^2) + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{13}A_{31}\kappa_2^2 \quad (6)$$

と表現することができる。(6) を ∇^2 に関する 3 次方程式であると見ると

$$L = (\nabla^2 - \gamma_1^2) (\nabla^2 - \gamma_2^2) (\nabla^2 - \gamma_3^2) \quad (7)$$

と表現することができる。ここに、 $\gamma_i^2 (i = 1, 2, 3)$ は ∇^2 に関する 3 次方程式の根である。

微分方程式

$$(\nabla^2 - \gamma_i^2) u = 0 \quad (8)$$

の基本解を $\Gamma(\gamma_i r)$ とすると、微分作用素 L による微分方程式

$$LU = 0 \quad (9)$$

の基本解は

$$U_\Gamma = A\Gamma(\gamma_1 r) + B\Gamma(\gamma_2 r) + C\Gamma(\gamma_3 r) \quad (10)$$

となる。以上から、連立微分方程式の基本解の各成分は、作用素行列の余因子を用いて以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= (\nabla^2 - \kappa_2^2) (\nabla^2 - \kappa_3^2) U_\Gamma & \Gamma_{12} &= A_{21} (\nabla^2 - \kappa_3^2) U_\Gamma & \Gamma_{13} &= [A_{31} (\nabla^2 - \kappa_2^2) - A_{21}A_{32}] U_\Gamma \\ \Gamma_{21} &= -A_{13}A_{32}U_\Gamma & \Gamma_{22} &= [(\nabla^2 - \kappa_1^2) (\nabla^2 - \kappa_3^2) - A_{13}A_{31}] U_\Gamma & \Gamma_{23} &= A_{32} (\nabla^2 - \kappa_1^2) U_\Gamma \\ \Gamma_{31} &= -A_{13} (\nabla^2 - \kappa_2^2) U_\Gamma & \Gamma_{32} &= -A_{13}A_{21}U_\Gamma & \Gamma_{33} &= (\nabla^2 - \kappa_1^2) (\nabla^2 - \kappa_2^2) U_\Gamma \end{aligned}$$

3 おわりに

連立方程式の基本解の詳細な形および、数値解析例は当日に示す。

今後の研究としては、3 群以上の多群中性子拡散問題の基本解の定式化、中性子拡散問題に関するベンチマーク問題の解析、高速多重極法を用いた計算の高速化等を考えている。

参考文献

- [1] C.Lubich : Convolution quadrature and discretized operational calculus, *Mumer. Math.*, 52, pp.129-145, 1998.
- [2] J.R.Lamarsh and A.J.Barata : *Introduction to Nuclear Engineering*, Third Edition, Pearson Education Inc., 2001, (邦訳 : 原著第 3 版 原子核工学入門, 澤田哲夫 訳, ピアソン・エデュケーション, 2003),
- [3] 浦 勝一 : 連成拡散方程式の境界要素法による解析, 土木学会中部支部 平成 17 年度研究発表会講演概要集, 2006(3).
- [4] 福井 卓雄 : 演算子積分法による中性子拡散問題の時間領域境界要素法, 計算力学講演論文集, 12, pp.861-864, 2007.