

離散作用素積分法を用いた二次元動弾性問題のための 時間領域高速多重極境界要素法

○福井大学大学院 学生会員 石田貴之
福井大学大学院 正会員 齋藤隆泰
福井大学大学院 正会員 福井卓雄

1. はじめに

境界要素法は無限領域を容易に扱える数値解析手法であることから、無限、半無限領域を扱うような波動問題に広く利用されてきた¹⁾。しかしながら、通常の時間領域境界要素法は、時間ステップ幅を小さくとした場合に、解が不安定になりやすく、また、大規模問題を扱う場合、計算時間・記憶容量が膨大となる、といった欠点が報告されてきた。本研究では繰り込み積分を精度よく安定に計算するために、離散作用素積分法²⁾を、また、計算効率を向上させるために高速多重極法³⁾を用いることで、これらの欠点を改善することを行う。ここでは二次元時間領域動弾性問題を例にとり、本手法の有効性について検討する。

2. 離散作用素積分境界要素法

(1) 二次元動弾性時間領域境界要素法の定式化

二次元動弾性問題の初期値境界値問題を考える。いま、与えられた領域を B 、その境界を ∂B とする。また初期条件 $u_i|_{t=0} = 0, \partial u_i / \partial t|_{t=0} = 0$ を仮定する。物体力を無視した場合、変位 u_i 、時間 t に対し、支配方程式および境界条件は

$$c_T^2 u_{i,jj}(\mathbf{x}, t) + (c_L^2 - c_T^2) u_{j,ji}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) \text{ in } B \quad (1)$$

$$u_i = \bar{u}_i \text{ on } \partial B_1, \quad \bar{t}_i \text{ on } \partial B_2, \quad \partial B = \partial B_1 + \partial B_2 \quad (2)$$

で与えられる。ここに、 c_L, c_T は縦波および横波の位相速度であり、 $c_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $c_T = \sqrt{\mu/\rho}$ で与えられる。 λ, μ はラメ定数、 ρ は密度である。 $\bar{u}_i, \bar{t}_i$ は変位および表面力に関する境界条件である。

この問題の解 $u_i(\mathbf{x}, t)$ は、時間領域境界積分方程式

$$C_{ij}(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}, t) = u_i^{in}(\mathbf{x}, t) + \int_{\partial B} G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * t_j(\mathbf{y}, t) dS_y - \int_{\partial B} S_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * u_j(\mathbf{y}, t) dS_y \quad (3)$$

により表される。ここに、 C_{ij} は自由項であり、 G_{ij}, S_{ij} は基本解および対応する二重層核である。また $f * g$ は繰り込み積分を表し、 $u_i^{in}(\mathbf{x}, t)$ は入射波を表す項である。一般に、式 (3) を時・空間に関して離散化し、得られる代数方程式を解くことにより境界上の未知数を得ることができる。しかしながら、繰り込み積分を精度良く、安定に計算することは容易でない。そこで Lubich により提案された離散作用素積分法を用いる。

(2) 離散作用素積分法による時間領域境界要素法の定式化

Lubich は、繰り込み積分

$$f * g(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau \quad t \geq 0 \quad (4)$$

の離散化表現を時間ステップ Δt に対して

$$f * g(n\Delta t) = \sum_{k=0}^n \omega_{n-k}(\Delta t) g(k\Delta t) \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (5)$$

で表したときの重みを適切に決定する方法を提案した。この場合の重み $\omega_n(\Delta t)$ は

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} F\left(\frac{\delta(\zeta)}{\Delta t}\right) \zeta^{-n-1} d\zeta \\ &\simeq \frac{\rho^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} F\left(\frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\right) e^{-\frac{2\pi i n l}{L}} \end{aligned} \quad (6)$$

で与えられる。ここに、 F は f の Laplace 変換であり $\delta(\zeta)$ は近似に利用する線形マルチステップ法の生成多項式の商である。また、 $\zeta_l = \rho e^{2\pi i l/L}$ であり、 ρ は目標とする精度 ϵ により決定されるパラメータである。

ここで、式 (3) の繰り込み積分に境界上の近似基底 ϕ^I を用い、離散作用素積分法を適用し離散化することで、以下の離散境界積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_I \phi^I(\mathbf{x}) u_i^I(n\Delta t) &= u_i^{in}(\mathbf{x}, n\Delta t) \\ &+ \sum_I \sum_{k=1}^n \left[A_{ij}^{n-k,I}(\mathbf{x}) t_j^I(k\Delta t) - B_{ij}^{n-k,I}(\mathbf{x}) u_j^I(k\Delta t) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

ここに、影響関数 $A_{ij}^{m,I}, B_{ij}^{m,I}$ は重みの近似表現 (6) より

$$A_{ij}^{m,I}(\mathbf{x}) = \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_{\partial B} \hat{G}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) \phi^I(\mathbf{y}) dS_y e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} \quad (8)$$

$$B_{ij}^{m,I}(\mathbf{x}) = \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_{\partial B} \hat{S}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) \phi^I(\mathbf{y}) dS_y e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} \quad (9)$$

となる。ここに、 $s_l = \delta(\zeta_l)/\Delta t$ であり、 ρ は誤差を ϵ として、 $\rho^L = \sqrt{\epsilon}$ の関係より決定される。また、Laplace 変換解 $\hat{G}, \hat{S}$ は、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{G}_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, s) &= \frac{1}{2\pi\mu} \left\{ K_0(s_T |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \delta_{ij} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{s_T^2} [K_0(s_T |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) - K_0(s_L |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)]_{,ij} \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, s) &= \rho(c_L^2 - 2c_T^2) \hat{G}_{kj,k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) n_i \\ &+ \rho c_T^2 \left(\hat{G}_{ij,k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) + \hat{G}_{kj,i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \right) n_k \end{aligned} \quad (11)$$

ここに、 $s_L = s/c_L, s_T = s/c_T$ である。 n_i は点 $\mathbf{y}$ における境界上の外向き単位法線ベクトルの成分を表す。また、 K_n は第 2 種変形 Bessel 関数である。

3. 高速多重極法の適用

弾性波動場においては、直接多重極展開を行うことは困難である。そこでここでは、多重極展開を行うための基本解の表現方法について述べる。二次元動弾性問題における Laplace 変換域での基本解 (10) は、縦波および横波に対する波動方程式の基本解の Laplace 変換

$$g_L = \frac{1}{2\pi} K_0(s_L |\mathbf{x} - \mathbf{y}|), \quad g_T = \frac{1}{2\pi} K_0(s_T |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \quad (12)$$

を用いて

$$\hat{G}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\mu} \left[g_T \delta_{ij} - \frac{1}{s_T^2} (g_T - g_L)_{,ij} \right] \quad (13)$$

と表すことができる。これを用い X_i を集中荷重とすると変位場 u_i^G は

$$\begin{aligned} u_i^G(\mathbf{x}) &= \hat{G}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) X_j \\ &= \frac{1}{s_T^2 \mu} \left[((g_L)_{,k} X_k)_i + e_{3ij} (e_{3kl} (g_T)_{,l} X_k)_{,j} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

となる。同様に、変位場 u_i^S は U_i を食い違い量として

$$\begin{aligned} u_i^S(\mathbf{x}) &= \hat{S}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) U_j \\ &= -\frac{1}{s_T^2 \mu} \left[(V_{jk} (g_L)_{,jk})_{,i} + e_{3im} [e_{3kn} V_{jk} (g_T)_{,nj}]_{,m} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

で表される。ここに、 V_{ij} は以下のように与えられる。

$$V_{jk} = \lambda \delta_{jk} n_m^y U_m + \mu (n_k^y U_j + n_j^y U_k) \quad (16)$$

式 (14), (15) によれば、変位場 u_i^G, u_i^S は Helmholtz 分解

$$u_i(\mathbf{x}) = \phi_{,i} + e_{3ij} \psi_{,j} \quad (17)$$

の形となっている。各成分はそれぞれスカラー場の基本解で表されており、スカラー場における多重極展開を用いて計算することが出来る。

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n K_n(s_L r) e^{in\theta} \quad (18)$$

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} N_n K_n(s_L r) e^{in\theta} \quad (19)$$

ここに、 M_n, N_n は多重極モーメントである。結局、式 (18), (19) のように、各成分の多重極展開は、スカラー波動問題における多重極展開と同様の形で得られる。よって、動弾性問題の高速多重極法は、スカラー波動問題における高速多重極法⁴⁾と同様に実現することが可能である。

4. 数値解析例

本手法を用いた数値解析例を示す。解析は図 1 のように、半径 a の空洞が 4×4 に配置されているものを考える。各空洞の要素数は 64 要素であり、全要素数は 1024 要素である。また、時間増分を $c_L \Delta t/a = 0.125$ とした。入射波は振幅 u_0 の縦波 $\sin$ 波を用いている。その他パラメータは、 $L = N = 128, \rho = 0.913982 (\epsilon = 10^{-10})$ としている。なお、入射波は $c_L t/a = 0$ で図 1 の左一列の空洞の前面に到達する。図 2(a)-(c) はそれぞれ時刻 $c_L t/a = 3.0, 7.0, 11.0$ での空洞周辺の x_1 方向の変位場であり、入射波が空洞に到達し、散乱波が発生していく過程を見てとれる。

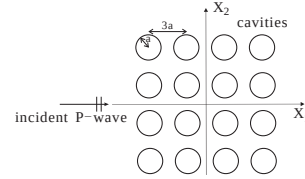


図 1 空洞散乱体による散乱解析モデル

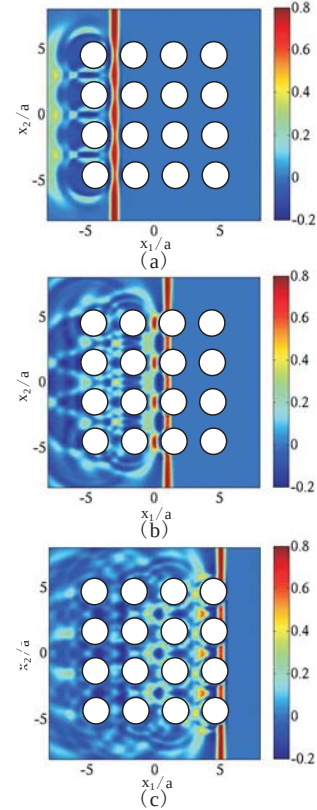


図 2 各時刻における空洞周りの全変位場 u_1/u_0
(a): $c_L t/a = 3.0$ (b): $c_L t/a = 7.0$ (c): $c_L t/a = 11.0$

5. おわりに

本研究では、二次元動弾性問題に対する、離散作用素積分法および高速多重極法を用いた時間領域境界要素法の定式化を行った。今後は、粘弾性問題への拡張等を行っていく予定である。

参考文献

- 1) 小林昭一編著: 波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, (2000).
- 2) Lubich, C.: Convolution quadrature and discretized operational calculus I *Numer. Math.*, **52** (1988), pp. 129-145.
- 3) Rokhlin, V: Rapid solution of integral equations of classical potential theory, *J. Comput. Phys.*, **60** (1985), pp. 187-207.
- 4) 福井卓雄, 岡山美央, 石田貴之: 2 次元波動伝播問題における演算子積分時間領域境界要素法および高速多重極法の適用, 計算数理工学論文集, vol.6-2, (2006), pp. 153-158.