離散作用素積分法を用いた三次元波動伝播問題のための時間領域高速多重極境界要素法

○福井大学大学院 正会員 斎藤 隆泰
福井大学大学院 学生会員 石田貴之
東京工業大学大学院 正会員 廣瀬壮一
福井大学大学院 正会員 福井卓雄

1. はじめに

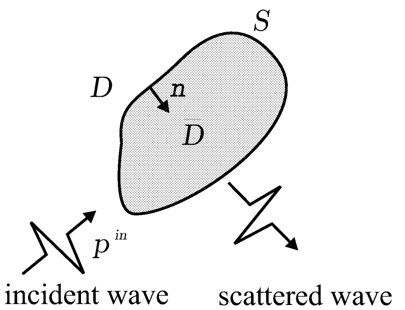
本論文では, 離散作用素積分法を用いた三次元時間領域境界要素法の大規模問題に対する計算効率の問題を改善するために, 高速多重極法の適用を行ったものである．著者らのグループでは, 近年, 繰込み積分を精度良く安定に計算できる手法である離散作用素積分法や, 多体問題の高速解析手法である高速多重極法 (FMM) を時間領域境界要素法に適用した離散作用素積分時間領域高速多重極境界要素法に関する研究を行ってきた．本研究では, 三次元波動伝播問題のための離散作用素積分時間領域高速多重極境界要素法の概要および解析結果を示し, 本手法の有効性, 今後の課題について検討する．

2. 三次元時間領域境界要素法

図 1 のような三次元無限領域 D における外部散乱問題を考える．境界 S を有する散乱体 $\bar{D}$ により, 入射圧力波 p^{in} が反射・散乱された時, 時刻 t における全圧力場 $p(\boldsymbol{x},t)$ に対する時間領域境界積分方程式は, 対応する圧力勾配 $q(\boldsymbol{x},t)=\partial p/\partial n$ を用いて以下のように表される．

$$C(\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{x},t)=p^{in}(\boldsymbol{x},t)+\int_S G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)*q(\boldsymbol{y},t)dS_y - \int_S H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)*p(\boldsymbol{y},t)dS_y \quad (1)$$

ただし,C は自由項 [1] であり,$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ 及び $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ はそれぞれ三次元波動問題に対する時間領域基本解及び対応する第二基本解である．また,$*$ は繰込み積を表す．通常, 式 (1) を時・空間に離散化し, 代数方程式に帰着させることで境界上の未知量を決定することが出来る．本研究における従来の時間領域境界要素法との主な相違点は, 式 (1) の繰込み積の評価に離散作用素積分法を用いること, 離散化された代数方程式の行列ベクトル積の計算に, 高速多重極法を適用する二点である．以下では, それら二点について簡単な概要を示す.



図–1 三次元無限領域 D と境界 S を有する散乱体 $\bar{D}$

3. 離散作用素積分法の境界積分方程式への応用

Lubich[2] は繰込み積分

$$f*g(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau,\ \ t\geq 0 \quad (2)$$

の近似値を離散化繰込み積

$$f*g(n\triangle t)\simeq\sum_j \omega_{n-j}(\triangle t)g(j\triangle t) \quad (3)$$

により計算する場合の重み $\omega_j(\triangle t)$ の決定法として,f の Laplace 変換を導入し, 一部の積分を差分解に置き換える手法を提案した．この方法によれば, 重みの近似値は時間増分 $\triangle t$ に対して

$$\omega_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=\rho}F\left(\frac{\delta(\xi)}{\triangle t}\right)\xi^{-n-1}d\xi \simeq \frac{\rho^{-n}}{L}F\left(\frac{\delta(\xi)}{\triangle t}\right)e^{\frac{-2\pi inl}{L}} \quad (4)$$

により計算される．ここに,F は f の Laplace 変換であり $\delta(\xi)=\sum_{j=0}^{\infty}\delta_j\xi^j$ は利用する差分法 (線形マルチステップ法) の生成多項式の商である．また $\xi_l=\rho e^{2\pi il/L}$ であり, ρ は目標とする精度により決定されるパラメータ,L は定数である．離散作用素積分法を時間領域境界積分方程式 (1) に適用するには, 境界 S に適当な近似規定を考慮して離散化した上で, 離散作用素積分法による繰込み積の近似表現を求めればよい．例えば, 一定要素で離散化近似し, それらの結果だけ示せば, 結局, 第 n ステップ目において, 式 (1) は,

$$\frac{1}{2}p(\boldsymbol{x},n\triangle t)=p^{in}(\boldsymbol{x},n\triangle t) +\sum_{k=1}^{n}\left[A^{n-k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})q(\boldsymbol{x},k\triangle t)-B^{n-k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})u(\boldsymbol{x},k\triangle t)\right] \quad (5)$$

となる．ただし, 式 (5) において,$A^m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$,$B^m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は影響関数であり, 式 (3) の離散化繰込み積とその重み表現式 (4) を用いた離散作用素積分法により, それぞれ次のように

求めることができる．

$$A^m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{\rho^{-m}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\int_S \hat{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},s_l)e^{\frac{-2\pi iml}{L}}dS_y \quad (6)$$

$$B^m(\boldsymbol{x}) = \frac{\rho^{-m}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\int_S \hat{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},s_l)e^{\frac{-2\pi iml}{L}}dS_y \quad (7)$$

ただし,s_l は $s_l = \delta(\xi_l)/(c\triangle t)$ で定義され,c は波速, $\hat{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},s_l)$,$\hat{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},s_l)$ は $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$,$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ それぞれのラプラス像空間における基本解である．また, パラメーター ρ は $\rho < 1$ の条件で与えられ,$\rho^L = \sqrt{\epsilon}$ として決定される．ここで ϵ は式 (6),(7) の計算で想定される誤差である．

4.　高速多重極法の適用

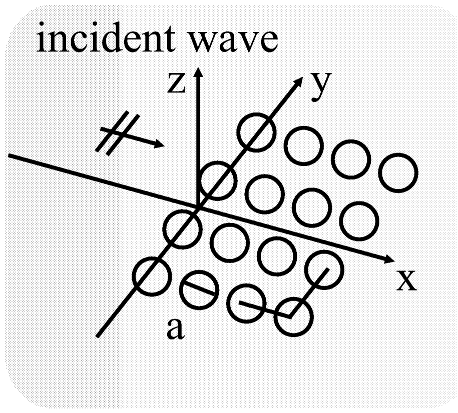
離散作用素積分法を用いて得られた式 (5) は, 境界上の未知量を解とした代数方程式へと帰着できる．しかしながら, 要素数や時間ステップ数の増加に伴い, 大規模な係数行列となり現実的な時間内に解を求めることは極めて困難となる．そのため, 本研究では, 式 (5) から得られる代数方程式の解法に高速多重極法[3] を用いて行列ベクトル積の計算を高速化する (高速多重極法の境界要素法への適用の詳述については,[1] を参照)．高速多重極法を用いる場合は, 式 (6),(7) におけるラプラス像空間の基本解を $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ における変数分離系で表し, 多重極モーメントを形成する．得られた多重極モーメントを 8 分木階層構造を用いた高速多重極アルゴリズムを用いて効率的に処理することにより行列ベクトル積を高速に計算する．この時, 式 (5) から得られる行列の成分を記憶しておく必要がなくなるため, 記憶容量も大幅に低減することが可能となる．

5.　数値解析例

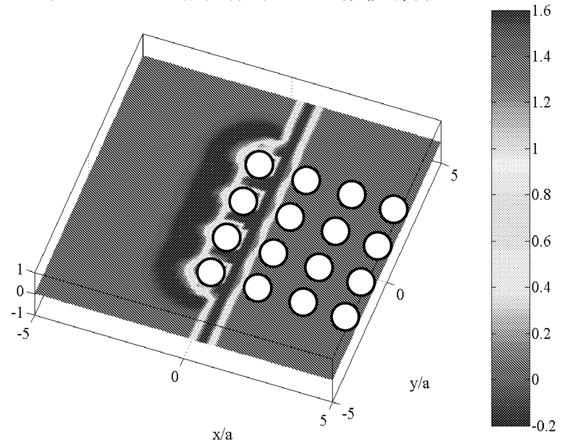
数値解析例として, 図 2 のような三次元無限領域中に存在する 4×4 の散乱体群による入射圧力波の散乱問題を考える．散乱体の形状は全て直径が a の球形とし, それらの中心座標は図のように x-y 面内に置かれているとする．また, 散乱体同士の配置間隔は x,y 方向それぞれに対して $a/2$ とした．また, 入射圧力波 $p^{in}(\boldsymbol{x},t)$ は次のように与えた．

$$p^{in}(\boldsymbol{x},t) = 1 - \cos 2\pi < t - (x+a)/c > \quad (8)$$

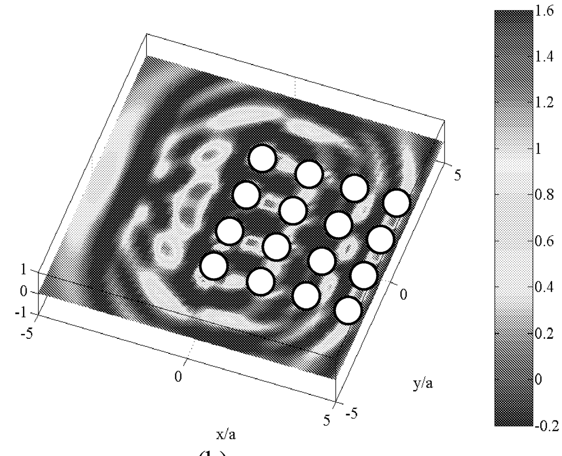
時間ステップ幅は $c\triangle t/a = 0.05$ とし, 式 (6), (7) における項数 L を $L = 128$, 総時間ステップ数 $N = 128$, パラメータ ρ を $\rho \simeq 0.9$ とした．また, 全ての散乱体は要素数 384 の一定要素で離散化し解析を行った．なお, 本解析では, 高速多重極法の適用のみならず, OpenMP により 8 つのスレッドを用いて並列化を行っている．図 3(a),(b) はそれぞれ時刻 $ct/a = 1.25, 6.25$ における散乱体周辺の圧力場を表している．図 3-(a),(b) より, 入射圧力波が 1 列目の散乱体付近に到達した場合, 散乱体群の領域を通過した場合における散乱体周辺の圧力場の様子をそれぞれ見ることができる．



図–2 4×4 の散乱体群による数値解析モデル



(a)



(b)

図–3 散乱体周辺の圧力場 (a) : $ct/a = 1.25$, (b):$ct/a = 6.25$

6.　まとめ

離散作用素積分法を用いた三次元波動伝播における時間領域高速多重極境界要素法を開発した．今後は, 本手法の精度の検証をしつつ, 三次元動弾性問題への拡張を行う予定である．

参考文献

1) 小林昭一編著: 波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, 2000.
2) Lubich, C. : Convolution quadrature and discretized operational calculus I *Numer. Math.*, **52** (1988), pp. 129-145.
3) Rokhlin, V: Rapid solution of integral equations of classical potential theory, *J. Comput. Phys.*, **60**(1985), pp. 187-207.