

BF-spline Ritz 法を用いた Mindlin 板の動的応答解析

大同工業大学大学院 学生員 ○和田 裕明 大同工業大学 正員 水澤富作

1. はじめに 走行車両や衝撃荷重を受ける厚板の動的解析は、平板の動的設計上重要な課題であるが、薄板の研究と比較して、有限要素法を適用した研究を除くと、任意の境界条件を有する厚板の動的応答解析はさほど多く研究されていない。著者らは、BF-spline Ritz法を定式化し、Mindlin板の自由振動解析¹⁾と曲げ解析²⁾への適用について検討を行い、他の数値解析法の結果と比較して、良好な解析精度を得ているが、厚板の動的応答解析への適用は未検討であった。

本研究では、BF-spline Ritz 法と modal analysis 法を用いて、ステップ荷重を受ける等方性 Mindlin 板の動的応答解析を行い、本手法の解の収束性や解析精度について検討を行い、本手法の有用性及び解の妥当性について明らかにしている。また、衝撃応答に与えるステップ荷重の載荷時間 t_1 や幅厚比 b/h などの影響について示す。

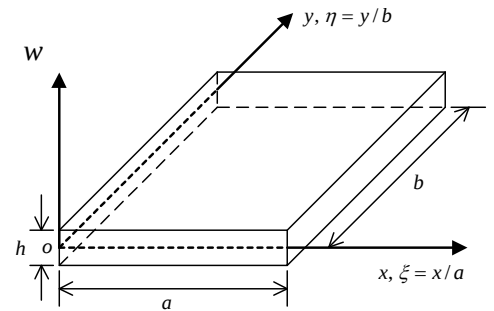


図-1 長方形厚板と座標系

2. BF-spline Ritz法による定式化 Mindlin板理論で仮定される3つの独立した変位関数(たわみ w と2つの回転角 (ϕ_x, ϕ_y))は、境界関数とB-spline 関数を掛け合わせた許容関数で表し、無次元極座標系 $(\xi = x/a, \eta = y/b)$ を用いれば、それぞれ次式で仮定される。

$$\phi_x(\xi, \eta) = F_x(\xi)G_x(\eta) \sum_{m=1}^{i_\theta} \sum_{n=1}^{i_r} A_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) \quad , \quad \phi_y(\xi, \eta) = F_y(\xi)G_y(\eta) \sum_{m=1}^{i_\theta} \sum_{n=1}^{i_r} B_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) \quad ,$$

$w(\xi, \eta) = F_w(\xi)G_w(\eta) \sum_{m=1}^{i_\theta} \sum_{n=1}^{i_r} C_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta)$ (1) ただし、 $N_{m,k}(\xi)$ 、 $N_{n,k}(\eta)$ は、 $k-1$ 次の正規化されたB-spline であり、 A_{mn} 、 B_{mn} 、 C_{mn} はそれぞれ未定係数である。 $i_x = k-2 + m_x$ 、 $i_y = k-2 + m_y$ 、 $k-1$ はB-spline 関数の次数、 m_x と m_y はそれぞれ ξ 方向と η 方向に設けた区分点の数である。また、 $F_i(\xi)$ と $G_i(\eta)$ は、それぞれの境界辺で与えられる幾何学的境界条件を満たす境界関数である¹⁾。

等方性な長方形 Mindlin 板のひずみエネルギー U と運動エネルギー T は、それぞれ次式で与えられる。

$$U = \frac{D}{2} \left(\frac{a}{b} \right) \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \left(\frac{b}{a} \right)^2 \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial \eta} \right)^2 + \nu \left(\frac{b}{a} \right) \left[\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial \xi} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{1-\nu}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{b}{a} \right) \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial \xi} \right) \right]^2 + 6\kappa(1-\nu) \left(\frac{b}{h} \right)^2 \left[\left\{ \left(\frac{b}{a} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + \phi_x \right\}^2 + \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right) + \phi_y \right\}^2 \right] \right\} d\eta d\xi \quad (2)$$

$$= \frac{D}{2} \left(\frac{a}{b} \right) \{ X \}_{mn}^T [K]_{mnr s} \{ X \}_{rs}$$

$$T = \frac{1}{2} \rho h \omega^2 a b^3 \int_0^1 \int_0^1 \left\{ W^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{b}{h} \right)^2 (\phi_x^2 + \phi_y^2) \right\} d\eta d\xi = \frac{1}{2} \omega^2 \{ X \}_{mn}^T [M]_{mnr s} \{ X \}_{rs} \quad (3)$$

ここで、 $[K]_{mnr s}$ と $[M]_{mnr s}$ は、剛性マトリックスと質量マトリックスであり、 D は板の曲げ剛性、 κ と ν はそれぞれせん断修正係数とポアソン比である。また、 ρ は密度、 ω は円振動数(rad/sec)である。

したがって、Ritz 法を適用して、板の全ポテンシャルエネルギー $\Pi = U - T$ を未定係数ベクトルで極値化すれば、次式の固有方程式が得られる。 $\partial \Pi / \partial \{ X \}_{rs} = ([K]_{mnr s} - n_{mn}^{*2} [M]_{mnr s}) \{ X \}_{mn} = 0$ (4)

ここで、 $\{ X \}_{mn} = \{ \{ \delta_A \}_{mn} \quad \{ \delta_B \}_{mn} \quad \{ \delta_C \}_{mn} \}^T$ 、 $m, r = 1, 2, \dots, i_x$ 、 $n, s = 1, 2, \dots, i_y$ 、 $n_{mn}^{*2} = \omega_{mn}^2 b^2 \sqrt{\rho h / D}$ は振動数パラ

メータであり、また $\{ X \}_{mn}$ は正規化された振動モードに対応する係数パラメータである。

次に、ステップ荷重を受ける平板の動的応答解析は、modal analysis 法(modal displacement method)を用いて定式化する。ステップ荷重を受ける平板の運動方程式は、減衰の影響を無視すると、次式で与えられる。

$$[M] \ddot{\{ x \}} + [K] \{ x \} = \{ F(t) \} \quad (5)$$

ここで, $[M]$ と $[K]$ は, 式(4)に示す剛性行列と質量行列であり, $\{x\}$ と $\{F\}$ はそれぞれ一般化変位ベクトルと外力ベクトルである. 式(4)の固有値計算より, ij 次の固有値 ω_{ij} と固有ベクトル $\{X\}_{ij}$ が求められる. 変位ベクトル $x(t)$ は, r 個の固有ベクトルからなるモーダル行列 $[X]$ と時間項 $q(t)$ に分離して, $x(t)=[X]q(t)$ で表される.

モーダル行列 $[X]$ を用いて, 式(5)を書き換えると, 次式で表される.

$$[X]^T[M][X]\{\ddot{q}\}+[X]^T[K][X]\{q\}=[X]^T\{F(t)\}; [X]^T[K][X]=[I], [X]^T[M][X]=[\omega_{ij}] \quad (6)$$

また, 外力ベクトルは, $[X]^T F(t)=Q(t)$ で表されるので, モーダル行列の直交性により ij 次モードに対する一自由度系の運動方程式が得られる.

$$\{\ddot{q}\}+\omega_{ij}^2\{q\}=Q_{ij}(t); i, j=1, 2, \dots, r \quad (7)$$

したがって, 与えられた初期条件の下に式(7)を解けば, 動的応答が求められる.

3. 数値計算例および考察

数値計算例では, $\nu=0.3$, $\kappa=5/6$ に仮定し, ステップ等分布荷重を受ける周辺固定された長方形厚板の動的応答解析について示す. 本手法の解析精度を確認するために, Navier法を適用した周辺単純支持された正方形板の厳密解と比較し, 20 個の振動モードを用いれば, 動たわみと断面力の応答値が, 有効桁数で 3 桁まで一致した結果を得ている.

図-2 には, ステップ等分布荷重を受ける周辺固定厚板の動たわみ及び固定辺での曲げモーメント M_x とせん断力 Q_x の応答曲線に与える幅厚比 b/h の影響が示してある. ここで, $k-1=4$ 次, 区分点の数 $m_x=m_y=21$, 無次元载荷時間 $\tau_1=t_1/(a^4 \times \rho h/D)^{0.5}=0.25$, 採用モード数は 20 に仮定している. また, b/h は 5 から 100 まで変化させている. これより, 動たわみの大きさに与える b/h の影響が顕著に見られるが, 動的曲げモーメントやせん断力の最大値にはさほど変化が見られないが, 動的応答曲線は異なった性状を示している. 図-3 には, 動たわみ曲線に与える载荷時間 τ_1 の影響が示してある. 動たわみは, τ_1 の値により異なった応答性状を示している.

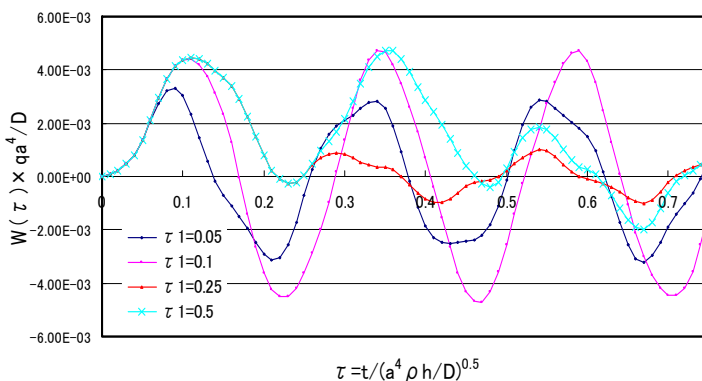
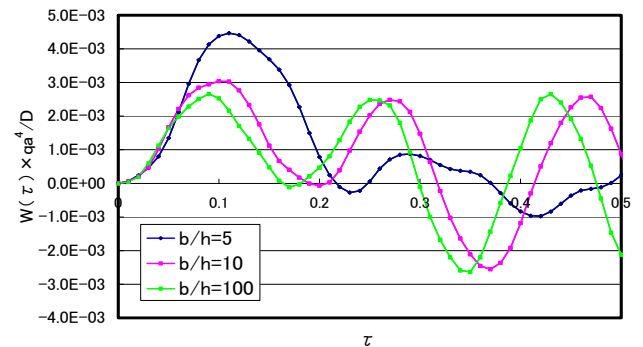
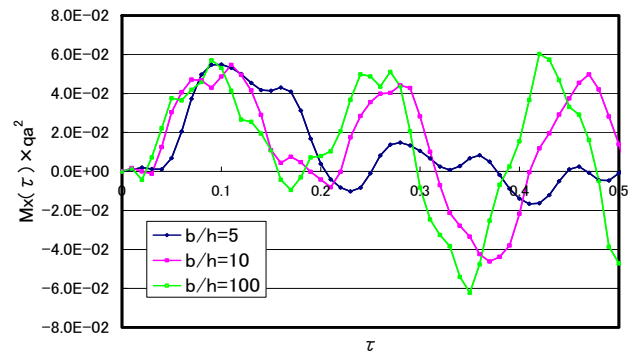


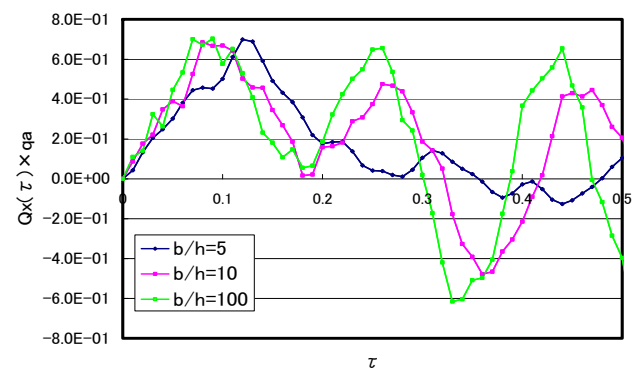
図-3 板中央点の動たわみに与える载荷時間 τ_1 の影響: CC-CC, $b/h=5$



a) 中央点 ($\xi=0.5, \eta=0.5$)での動たわみ応答曲線



b) 固定辺中点 ($\xi=0, \eta=0.5$)での $M_x(\tau)$ の応答曲線



c) 固定辺中央点 ($\xi=0, \eta=0.5$)でのせん断力 $Q_x(\tau)$ 応答曲線

図-2 ステップ荷重を受ける固定板の動的応答に与える

4. まとめ

本論文で得られた結果は, 以下の通りである. 幅厚比の影響: $a/b=1$, $\tau_1=0.25$, $k-1=4$, $m_x=m_y=21$

1) BF-spline Ritz法と modal analysis法に基づく厚板の動的応答解析法を定式化した. 2) 本手法で求めた値は, 厳密解とよく一致した結果が得られた. 3) ステップ荷重を受ける厚板の動的応答に与える幅厚比と载荷時間の影響は, 図-2 及び 3 に示すように顕著に見られる.

参考文献 1) 名木野他: BF-spline Ritz法を用いた長方形 Mindlin 板の振動解析, 応用力学論文集, Vol. 9, pp. 341-352, 2006. 2) 水澤: BF-spline Ritz法を用いた長方形厚板の曲げ解析, 構造工学論文集, Vol. 53A, pp. 1-12, 2007.