斜板の振動解析における BF-spline Ritz 法の数値安定性

大同工業大学 正員 ○水澤 富作　大同工業大学大学院 学生員　和田 裕明

１．はじめに　斜スラブ，斜めデッキや翼などの構造要素として用いられる斜板の振動特性を知ることは，設計上重要な課題である．斜板の振動問題では，関数の直交性が成りたたず，また厳密な解を求めることが困難になるので，有限要素法やRitz法などの数値解析法が適用されているが，斜角の増大と共に，鈍角点近傍に生じる応力集中により，解の収束が遅く，また解析結果の値に相違が見られる[1)]．一方，BF-spline Ritz 法の適用にあたり，4次を超えるB-spline関数を用いると，固定辺を有する斜板の解に数値不安定が見られた．

本研究では，幾何学的境界条件を自動的に満足させる境界関数と B-spline 関数を組み合わせた BF-spline Ritz 法[2),3)]を Mindlin 斜板の振動解析へ適用し，解の数値不安定を回避する工夫について検討を行っている．

２．BF-spline Ritz 法の定式化　自動的に幾何学的境界条件を満足する境界関数[2)]と B-spline 関数を変位関数に仮定した BF-spline Ritz 法を定式化する．次式の無次元斜交標系（$\xi = x/a$, $\eta = y/b$, $w = W/h$）を用いる．ここで，a,b,h は，それぞれ図−1に示すような斜板の長さ，板幅と板厚である．

$$\phi_x(\xi,\eta)=F_x(\xi)G_x(\eta)\sum_{m=1}^{i_x}\sum_{n=1}^{i_y}A_{mn}N_{m,k}(\xi)N_{n,k}(\eta)\quad,\quad \phi_y(\xi,\eta)=F_y(\xi)G_y(\eta)\sum_{m=1}^{i_x}\sum_{n=1}^{i_y}B_{mn}N_{m,k}(\xi)N_{n,k}(\eta)\ ,$$

$$w(\xi,\eta)=F_w(\xi)G_w(\eta)\sum_{m=1}^{i_x}\sum_{n=1}^{i_y}C_{mn}N_{m,k}(\xi)N_{n,k}(\eta) \qquad \cdots(1)$$

ただし， $i_x=k-2+m_x$, $i_y=k-2+m_y$, $N_{m,k}(\eta)$, $N_{n,k}(\eta)$は正規化された B-spline 関数である．ただし，k-1 はspline 関数の次数であり，m_xは x 方向の区分点の数，m_yは y 方向の区分点の数を表す．また，A_{mn},B_{mn},C_{mn} はそれぞれ未定係数ベクトルである．また，$F_i(\xi)$と $G_i(\eta)$は固定辺の幾何学的境界条件を満たす境界関数であり，表－１で仮定する．表中のαは，境界関数の振幅の大きさを示す重み係数である．斜め等方性 Mindlin 板のひずみエネルギーUと運動エネルギーT は，それぞれ次式で与えられる．

表－１　固定辺に対応する境界関数

	$\xi=0$ $F_x(\xi)$	$\xi=1$ $F_y(\xi)$	$F_w(\xi)$	$\eta=0$ $G_x(\eta)$	$\eta=1$ $G_y(\eta)$	$G_w(\eta)$
C—C	$\alpha(\xi-\xi^2)$	$\alpha(\xi-\xi^2)$	$\alpha(\xi-\xi^2)$	$\alpha(\eta-\eta^2)$	$\alpha(\eta-\eta^2)$	$\alpha(\eta-\eta^2)$

$$\begin{aligned}U&=\frac{D}{2}\left(\frac{b}{a}\right)\cos\theta\int_0^1\!\!\int_0^1\Bigg\{\sec^2\theta\left[\frac{\partial\phi_x}{\partial\xi}-\left(\frac{a}{b}\right)\sin\theta\frac{\partial\phi_x}{\partial\eta}-\sin\theta\frac{\partial\phi_y}{\partial\xi}+\left(\frac{a}{b}\right)\frac{\partial\phi_y}{\partial\eta}\right]^2-(1-\nu)\left(\frac{a}{b}\right)\left\{\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial\xi}\right)\left(\frac{\partial\phi_y}{\partial\eta}\right)+\left(\frac{\partial\phi_y}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial\xi}\right)\right\}\\&\quad+\frac{1-\nu}{2}\left\{\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial\eta}\right)+\left(\frac{\partial\phi_y}{\partial\xi}\right)\right\}^2+6\kappa(1-\nu)\left(\frac{b}{h}\right)^2\left(\frac{a}{b}\right)^2\Bigg[\left\{\left(\frac{h}{a}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)+\cos\theta\phi_x\right\}^2\\&\quad+\left[\phi_y-\sin\theta\phi_x-\left(\frac{h}{a}\right)\tan\theta\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)+\sec\theta\left(\frac{\partial w}{\partial\eta}\right)\right]^2\Bigg]\Bigg\}d\eta\,d\xi \qquad\cdots(2)\\&=\frac{D}{2}\left(\frac{b}{a}\right)\cos\theta\{\Delta\}_{mn}^{T}[K]_{mnrs}\{\Delta\}_{rs}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}\rho h\omega^2abh^2\cos\theta\int_0^1\!\!\int_0^1\left\{w^2+\frac{1}{12}(\phi_x{}^2+\phi_y{}^2-\sin\theta(\phi_x\phi_y+\phi_y\phi_x)\right\}d\eta\,d\xi\\&=\frac{1}{2}\omega^2\{\Delta\}_{mn}^{T}[M]_{mnrs}\{\Delta\}_{rs} \qquad\cdots(3)\end{aligned}$$

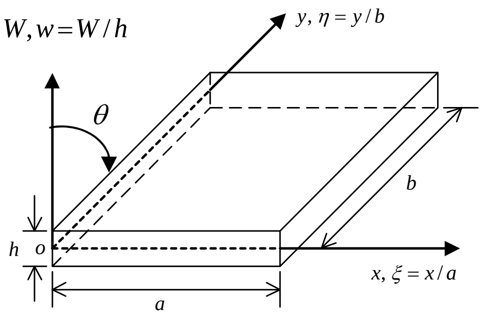

図-１　斜板と斜交座標系

ここで，$D=Eh^3/12(1-\nu^2)$，θ は斜角であり，$[K]_{mnrs}$と$[M]_{mnrs}$は，それぞれ剛性行列と質量行列であり，また κ と ν はそれぞれせん断修正係数とポアソン比である．

したがって，Ritz 法を用いて全ポテンシャルエネルギー$\Pi=U-T$ を極値化すれば，次式の代数方程式が導ける．

$$\partial\Pi/\partial\{\Delta\}_{mn}=[K]_{mnrs}\{\Delta\}_{rs}-n^{*2}[M]_{mnrs}=0,\{\Delta\}_{rs}=\{\{A\}_{rs},\{B\}_{rs},\{C\}_{rs}\} \qquad\cdots(4)$$

ここで，n^*は振動数パラメータであり，次式で定義する． $n^*=\omega b^2\sqrt{\rho h/D}/\pi^2 \qquad\cdots(5)$

３．数値計算例および考察　ここでは，本手法の収束性と解析精度に与える境界関数の振幅の大きさを表す重み係数 α の影響について示す．また，数値計算には，a/b=1，ν =0.3，κ =0.823 を用いる．

表‐1 には，周辺固定された斜板の振動数パラメータ n^*の収束性に与える spline 次数 k-1，区分点の数 m_x=m_y，と重み係数 α の影響が示してある．ここで，斜角 θ=45°，幅厚比 b/h=10，辺長比 a/b=1 とし，spline 次数を 4 次から 6 次，区分点の数は 11 から 31，α を 1 から 10^2 まで変化をさせている．また比較のために，Liew[1)]らの Ritz 法の解が示してある．これより，α を 1 に仮定した場合，spline 次数を 5 次以上にすると，係数行列の正値性が崩れて，解が得られなくなる．これは，高次の spline 基底が境界辺近傍で小さな値をとり，境界関数の積によりさらに小さな値になるので，数値安定性が得られないものと考えられる．一方，境界関数の振幅の大きさを示す重み係数 α を 100 に仮定すると，spline 次数の大きさや区分点の数に関係なく解が得られており，Liew[1)]らの解と比べても良く一致した結果が得られている．

表－1　周辺固定された斜板の振動数パラメータ n^*の収束性に与える spline 次数，区分点の数と重み係数 α の数の影響：θ=45°，b/h=10

k-1	α	Mx=My	Modes 1st	2nd	3rd	4th	5th
4	1	11	5.6039	8.4777	11.204	11.785	14.105
		21	5.6038	8.4777	11.204	11.785	14.105
		31	5.6038	8.4777	11.204	11.785	14.105
5	1	11	5.6039	8.4777	11.204	11.785	14.105
		21	×	×	×	×	×
		31	×	×	×	×	×
	10	11	5.6039	8.4777	11.204	11.785	14.105
		21	5.6038	8.4777	11.204	11.785	14.105
		31	5.6038	8.4777	11.204	11.785	14.105
	10^2	11	5.6039	8.4777	11.204	11.785	14.105
		21	5.6038	8.4777	11.204	11.785	14.105
		31	5.6038	8.4777	11.204	11.785	14.105
6	1	11	×	×	×	×	×
		21	×	×	×	×	×
		31	×	×	×	×	×
	10	11	5.6039	8.4777	11.2039	11.7853	14.1048
		21	×	×	×	×	×
		31	×	×	×	×	×
	10^2	11	5.6039	8.4777	11.2039	11.7853	14.1048
		21	5.6038	8.4777	11.2039	11.7852	14.1048
		31	5.6038	8.4777	11.2039	11.7852	14.1048
Liew[1)]			5.6040	8.4777	11.204	11.786	14.105

表‐2 は，周辺固定された斜板の振動数パラメータ n^*に与える斜角と重み係数 α の影響を示している．ここで，b/h=5，m_x=m_y=13，k-1=5 次に仮定し，斜角は 30°，45°，60°と変化させている．これより α=1 では斜角が増大すると，正値性が崩れ解を求めることができないが，重み係数 α を 10 以上にとると斜角の大きさに関わらず解が得られる．

表－2　周辺固定された斜板の振動数パラメータ n^*の収束性に与える斜角と α の影響：,b/h=5，k-1=5，m_x=m_y =13

α	θ	Modes 1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
1	30	3.2313	4.9757	6.0138	6.6217	8.2634	8.3595
	45	×	×	×	×	×	×
	60	×	×	×	×	×	×
10	30	3.2313	4.9757	6.0138	6.6217	8.2634	8.3595
	45	4.1589	5.9021	7.5422	7.7905	9.2158	10.092
	60	6.2257	8.0620	9.7648	11.450	11.537	13.094
10^2	30	3.2313	4.9757	6.0138	6.6217	8.2634	8.3595
	45	4.1589	5.9021	7.5422	7.7905	9.2158	10.092
	60	6.2257	8.0620	9.7648	11.450	11.537	13.094

表‐3 は，周辺固定された斜板の振動数パラメータ n^*に与える幅厚比と重み係数 α の影響を示している．ただし，斜角 θ=60°，区分点の数は 13 に仮定し，spline 次数は 5 次と 6 次，幅厚比を 5 から 100，α を 1 と 10 と変化させ検討を行っている．これより α を 10 にとれば，spline 次数と幅厚比の値に関わらず解が得られている．

表−3　周辺固定された斜板の振動数パラメータ n^*の収束性に与える幅厚比と α の影響：,θ=60°，k-1=5，m_x=m_y=13

k-1	α	b/h	Modes 1st	2nd	3rd	4th
5	1	5	×	×	×	×
		10	×	×	×	×
		100	12.276	17.906	23.317	29.289
	10	5	6.2257	8.0620	9.7648	11.450
		10	9.2941	12.563	15.542	18.576
		100	12.276	17.906	23.317	29.289
6	1	5	×	×	×	×
		10	×	×	×	×
		100	×	×	×	×
	10	5	6.2257	8.0620	9.7648	11.450
		10	9.2940	12.563	15.542	18.576
		100	12.275	17.906	23.317	29.288

４．　あとがき　得られた結果をまとめると，次のようになる．(1) BF-spline Ritz 法は，一様な収束性を示し，またその収束値は，他の数値解析法の値と比較して，良く一致した結果が得られている．(2)重み係数 α を大きくすれば，spline 次数，区分点の数，斜角，幅厚比の値に関わらず解を求められ，数値不安定性を回避することができる．

参考文献　1) Liew, K.M.et.al.: Vibration of thick skew plates based on Mindlin shear deformation plate theory. Journal of Sound and Vibration, Vol. 168, pp.39-69, 1993. 2) 名木野・水澤・三上：BF-spline Ritz 法を用いた長方形 Mindlin 板の振動解析，応用力学論文集, Vol.9, pp. 341-352,2006. 3) 水澤・和田・名木野: BF-spline Ritz 法を用いた厚肉斜板の振動解析，応用力学論文集, Vol.10, pp. 109-119, 2007.