

有限水深における波の三次干渉による波速変化

名古屋工業大学工学部 瀧本浩史
 名古屋工業大学大学院 フェロー 喜岡 渉
 名古屋工業大学大学院 正員 北野利一

1. はじめに

あらゆる線形波は、様々な周波数と波数ベクトルをもつ平面波（規準モード波）の重ね合わせとして表現できること、また、各々の波が独立に伝播することはよく知られている。非線形波に対しては、各規準モードの波はもはや独立には伝播しえなくて、弱い相互作用を通して互いにエネルギーを交換し合う。Longuet-Higgins・Phillips(1962)は、深海で波数の異なる波列が存在するとき、相互作用によってお互いの波速を変化させることを、Longuet-Higgins(1962)による四波相互作用の理論式に基づき示した。この変化は3次のオーダーであるが、同じオーダーのStokesによる単一波列に対する予測とは異なる。これらの非線形相互作用による波速への影響は、4波のセットでの共鳴相互作用を考慮しているときに見られる。本研究では、彼らの示した三次干渉理論を有限水深下での相互作用にまで拡張し、波速の増減を調べる。

2. 解析理論

Longuet-Higgins・Phillips (1962) は4波のうち2波ずつの波数が等しい2対の波の相互作用の問題に簡略化し、波速の変化を調べた。振幅 a 、波数 k 、角周波数 ω の波 (a, k, ω) の、 (a_1, k_1, ω_1) の波との相互作用による波速の増減 Δc は、 $a, a_1, k, k_1, \omega, \omega_1$ 、および $\mathbf{k}$ と $\mathbf{k}_1$ の間の角度 θ で表される。ここでは、彼らの三次干渉の理論から、水深 h が有限であるという条件で、波速の増減 Δc を表す式を導き、1つの波の波数ベクトルを固定しながら、もう1つの波の波数ベクトルを変化させて計算を行った。二つの波列、すなわち波 k_1 による波速の変化量 Δc は、 $\mathbf{k}_1$ 成分の3次オーダーまでの位相を考えることにより、 $a, a_1, k, k_1, \omega, \omega_1, kh, k_1h$ 、および図-1のように定義される θ, α, β の関数として次式で表される。ただし、角周波数 ω は分散関係式 $\omega^2 = g|\mathbf{k}| \tanh |\mathbf{k}|h$ から求められる。

$$\Delta c = \frac{K}{2a\omega^2} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} K = & a_1^2 a \omega_1 \omega \left[\omega_1 \{ k_1 \coth k_1 h + \omega_1^2 (1 - \coth^2 k_1 h) - \frac{1}{2} k \coth kh (1 - \coth^2 k_1 h \cdot \cos \theta) \} \right. \\ & \left. + \omega (k_1 \coth kh + k \coth k_1 h) \cos \theta \right] \\ & + A a_1 \left[|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}| \omega_1 \omega (1 - \coth |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}|h \cdot \coth k_1 h \cdot \cos \alpha) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}| \{ (\omega_1 - \omega)^2 - g |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}| \cdot \coth |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}|h \} - \frac{1}{2} \omega_1^3 (1 - \coth^2 k_1 h) \cdot \frac{1}{g} (\omega_1 - \omega) \coth |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}|h \right] \\ & + B a_1 \left[|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}| \omega_1 \omega (1 - \coth |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}|h \cdot \coth k_1 h \cdot \cos \beta) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}| \{ (\omega_1 + \omega)^2 - g |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}| \cdot \coth |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}|h \} + \frac{1}{2} \omega_1^3 (1 - \coth^2 k_1 h) \cdot \frac{1}{g} (\omega_1 + \omega) \coth |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}|h \right] \quad (2) \end{aligned}$$

ここに、 A, B はそれぞれ波数差の2次干渉項、波数和の2次干渉項の係数である。上式で K は a に比例することから、 Δc は波 k の振幅 a と無関係である。

3次オーダーの四波共鳴相互作用は、Zakharov 積分方程式により一般的に取り扱うことができる。Hoganら (1988) と同様に、二つの波列の相互作用を Zakharov 方程式に基づき定式化すると、有限水深下では次式を得る。

$$\Delta c = \frac{4\pi^2 \omega_1}{k_1 \tanh k_1 h \cdot k} T(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}) a_1^2 \quad (3)$$

上式中の核関数 T は、Stiassnie・Shemer(1984)によって求められているが、彼らの論文では式に多くの誤りがあるので、ここではMase・Iwagaki(1986)の式を用いた。

3. 計算結果とその考察

Δc は $a_1^2 k_1 \omega_1$ で除することで無次元化することができる．この無次元量は k の大きさには依存せず，また振幅 a, a_1 にも独立である． $kh = 1.0, 1.5, 2.0, 4.0$ の各ケースで，波数ベクトル $\mathbf{k}_1 = k(X, Y)$ の波による $\mathbf{k} = k(1, 0)$ の波の波速の変化量を無次元化した $\Delta c/a_1^2 k_1 \omega_1$ のコンタープロットを図-2 に示す．

なお， $(X, Y) = (0, 0)$ 付近の極浅海波については，式 (2) が発散するので計算範囲から除外している．2 つの波数が平行，または逆向きで平行であるときには， Δc は他の波の波数 k_1 ，振幅 a_1 には依存しない．この波速の変化は， kh が小さくなるほど大きくなる．また，他の波の伝播方向が反対のとき，つまり $\theta > \pi/2$ のときに，波速の減少はより顕著になり， kh が 2.0 程度より小さいときには， Δc の負の領域は $\theta \leq \pi/2$ にまで広がる． k, k_1 の和に比例する相互作用の項は，有限水深のケースにおいて， $\theta = 0$ のときでもなくなる．

さらに，これを Zakharov 方程式に基づき，より一般的な条件に対する相互作用について検討した．これらの表現の等値性は，任意に選択した波数 k, k_1 のペアに対する数値計算の結果を比較することで確認できる

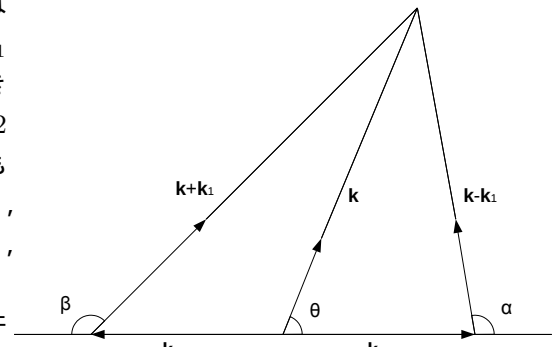


図-1 α, β および θ の定義

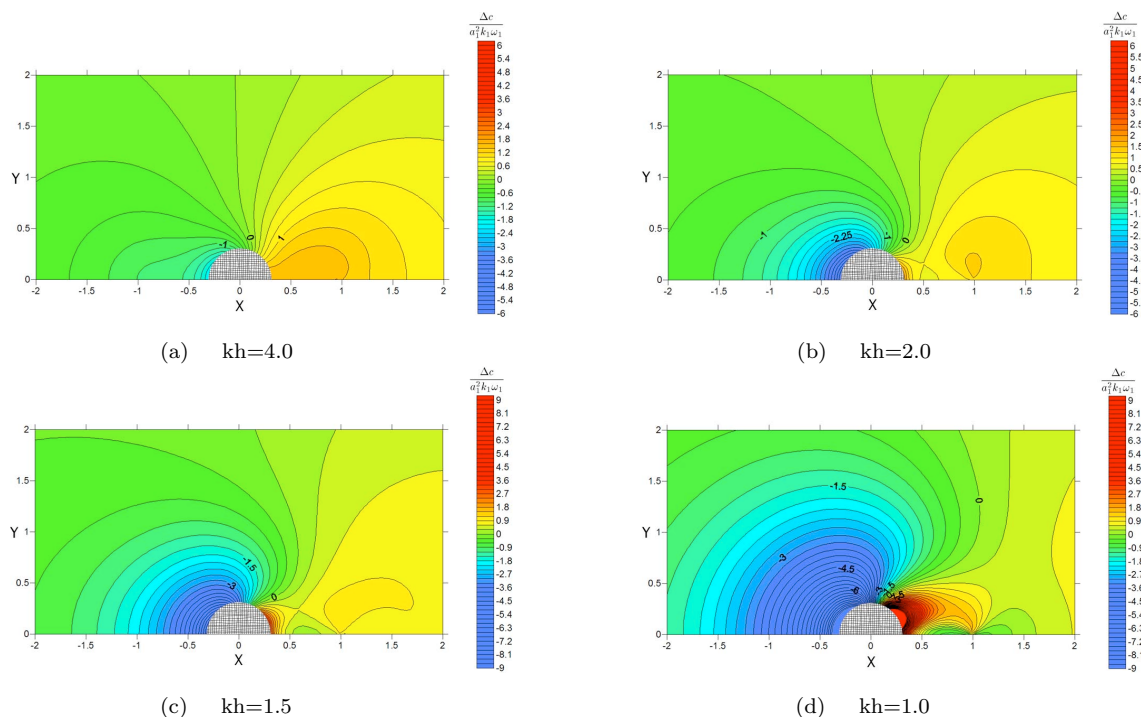


図-2 $\Delta c/a_1^2 k_1 \omega_1$ のコンタープロット

参考文献

- Hogan, S. J., Gruman, I. and Stiassnie, M. (1988): On the changes in phase speed of one train of water waves in the presence of another, J. Fluid Mech., vol.192, pp.97-114.
- Longuet-Higgins, M. S. (1962): Resonant interactions between two trains of gravity waves, J. Fluid Mech., vol.12, pp.321-332.
- Longuet-Higgins, M. S. and Phillips, O. M. (1962): Phase velocity effects in tertiary wave interactions, J. Fluid Mech., vol.12, pp.333-336.
- Mase, H. and Iwagaki, Y. (1986): Wave group analysis of natural wind waves based on modulational instability theory, Coastal Engineering, vol.10, pp.341-354.
- Stiassnie, M. and Shemer, L. (1984): On modifications of the Zakharov equation for surface waves, J. Fluid Mech., vol.143, pp.47-67.