

BF-spline Ritz 法を用いた Timoshenko 梁の高次振動解析

大同工業大学大学院 学員 ○渡邊晶子 大同工業大学 正員 水澤 富作

1. はじめに 高速運動や衝撃を受ける梁には、高次の曲げ振動が誘発されるので、高次振動による疲労問題が設計上重要な課題になっている¹⁾。横せん断変形や回転慣性の影響を受ける梁の高次振動問題は弾性振動論と弾性波動論から定式化されているが²⁾、梁の高次振動特性は、必ずしも明らかにされていない。

本研究では、高次振動で重要になる横せん断変形や回転慣性の影響を考慮した1次せん断変形理論に基づく spline-Ritz 法³⁾を定式化し、Timoshenko 梁の高次振動解析を行い、高次振動特性について検討を行っている。また、モーダルアナリシス法を用いて、衝撃荷重を受ける Timoshenko 梁の動的応答に与える高次振動の影響について明らかにしている。

2. Spline-Ritz 法の定式化 境界関数を導入した B-spline 関数を許容関数に仮定した Ritz 法(BF-spline Ritz 法)を用いて Timoshenko 梁の振動問題を定式化する。定式化には、無次元化座標($\xi = x/L$, $w' = w/h$)を用いる。ここで、 L は梁長さ、 h は梁高さである。Timoshenko 梁の変位関数は、次式で表す独立したたわみ

$$W_m(\xi) = E(\xi) \sum_{m=1}^{i_x} A_m N_{m,k}(\xi), \phi_m(\xi) = G(\xi) \sum_{m=1}^{i_x} B_m N_{m,k}(\xi) \quad (1)$$

ここで、 $N_{m,k}(\xi)$ は正規化された B-spline 関数であり、 A_m, B_m は、それぞれ未定係数である。また、 $i_x = k + M - 2$ であり、 M と $k-1$ はそれぞれ区分点の数と B-spline の関数の次数である。また、 $E(\xi)$ と $G(\xi)$ は、幾何学的境界条件を自動的に満たす境界関数である。

Timoshenko 梁のひずみエネルギー U と運動エネルギー T は、それぞれ次式で与えられる。

$$U = \frac{EI}{2L} \left[\int_0^1 \left(\frac{d\phi}{d\xi} \right)^2 d\xi + \frac{L^2 \kappa GA}{EI} \int_0^1 \left(\phi - \frac{h}{L} \frac{dw'}{d\xi} \right)^2 d\xi \right], T = \frac{\rho \omega^2 A h^2 L}{2} \int_0^1 \left(w'^2 + \frac{1}{12} \phi^2 \right) d\xi \quad (2)$$

ここで、 EI は梁の曲げ剛性、 κ はせん断修正係数、 G はせん断弾性係数、 ρ は密度、 ω は円振動数(rad/sec)である。また、 h, A はそれぞれ梁高さと断面積である。

Timoshenko 梁の全ポテンシャルエネルギー Π は、次式で与えられる。 $\Pi = U - T$ (3)

したがって、全ポテンシャルエネルギー最小の原理より、式(3)を極値化すると、次式の代数方程式が得られる。

$$[K]_{mn} \{\Delta_m\} - n_m^* [M]_{mn} \{\Delta_m\} = 0 \quad m, n = 1, 2, \dots, i_x \quad (4)$$

ここで、 $n_m^* = \omega_m^2 L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}$, $\{\Delta_m\} = \{A_m, B_m\}^T$, $[K]_{mn}$ と $[M]_{mn}$ は、それぞれ剛性マトリックスと質量マトリックスである。式(4)の固有値と正規化された固有ベクトルは、QR 法を用いて求めている。

ステップ衝撃荷重を受ける Timoshenko 梁の動的応答解析では、正規化された固有ベクトルを用いて、モード毎にモーダルマトリックスとモーダル外力ベクトルを求め、1自由度系の運動方程式を解くことにより、動たわみと曲げモーメントを計算している。

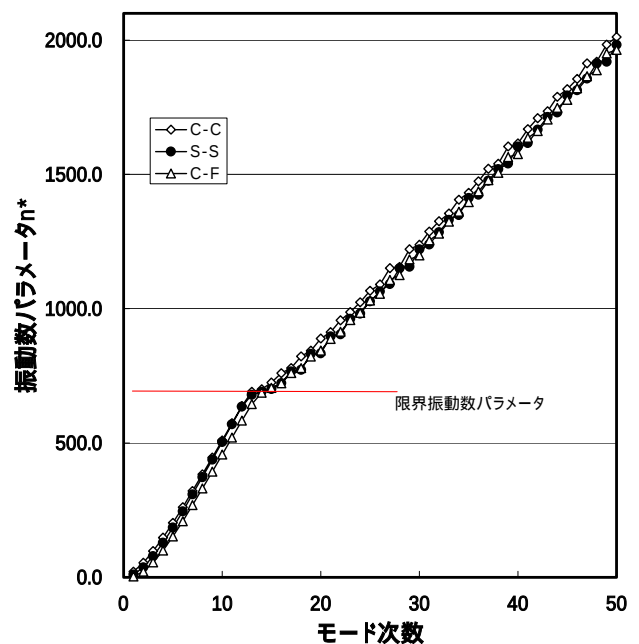


図-1 振動数パラメータ n^* とモード次数の関係
に与える境界条件の影響: $h/L=0.1$

3. 値計算例および考察 計算例では、spline 次数 $k-1=5$ 、区分点の数 $M=101$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ 、せん断修正係数 $\kappa=5/6$ に仮定する。

図 - 1 は、 $h/L=0.1$ の場合の Timoshenko 梁の振動数パラメータ $n^* = \omega L^2 \sqrt{\rho A / EI}$ と振動次数の関係に与える境界条件の影響を示している。図中の赤線は、限界振動数パラメータ $n^{*critical}$ である。これより、 n^* は、 $n^{*critical}$ を境にしてかなり異なった勾配を示すが、境界条件の影響はさほど大きく見られない。

図 - 2 は、単純梁の 25 次までの振動数と h/L の関係を示している。 R は回転 2 次半径であり、図中の黒丸の実線は、純せん断モードに対応する限界振動数を示す。これより、限界振動数曲線を境にして、曲げモードのみが生じる領域と曲げとせん断モード（図中の赤丸曲線）が同時に生じる領域に明瞭に分けられる。したがって、独立したたわみと回転角を仮定する Timoshenko 梁には、横せん断変形の影響により、2 つの異なったモード性状が現れる。しかしながら、せん断モードの振動数の解析精度については、3 次元弾性論による結果との比較が必要と思われる。

ステップ分布荷重を受ける Timoshenko 梁の動的応答に与える先に述べた曲げモードとせん断モードの影響を調べるために、モーダルアナリシス法を適用して、 h/L を 0.2 に仮定した単純梁の中央点の動たわみ $W \times qL^4/EI$ と曲げモーメント $Mx \times qL^2$ に与える採用モードの数の影響が図 - 3 に示してある。ただし、ステップ荷重の载荷時間 t_1 は、0.25 に仮定している。自由振動解析より、7 次に純せん断モード、8 次と 10 次にせん断モードが現れる。モード毎に、その前後の影響を調べて見たが、動たわみと曲げモーメントに与えるせん断モードの影響はほとんど見られないという結果を得ている。

4. まとめ 得られた結果をまとめると、以下のようになる。(1) Timoshenko 梁の振動数は、限界振動数を境にして、曲げモードのみが生じる領域と曲げとせん断モードが同時に生じる領域に明瞭に分けられる。(2) 限界振動数を境にして現れる 2 つのモード性状は、境界条件にさほど影響されない。(3) 衝撃荷重を受ける Timoshenko 梁の動たわみと曲げモーメントに与えるせん断モードの影響はほとんど見られない。

参考文献 1) Langley, R.S. and Bardell, N.S.: The Aeronautical Journal, pp. 287-297, 1998. 2) Abbas, B.A.H. and Thomas, J.: The second frequency spectrum of Timoshenko beams. JSV, Vol. 51, pp. 123-137, 1977. 3) 水澤・渡邊: 応用力学論文集, Vol.8, pp105-115, 2005.

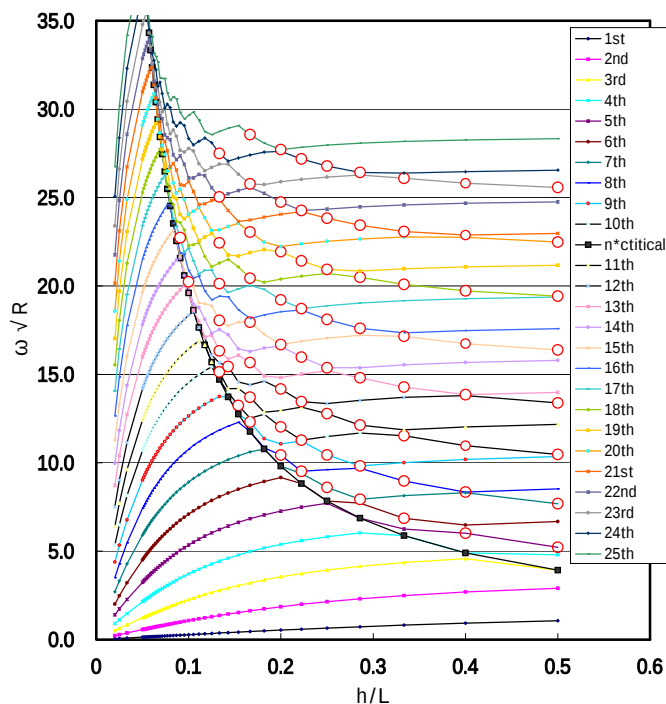
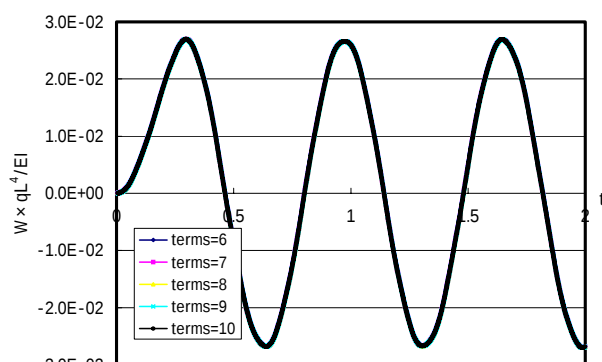
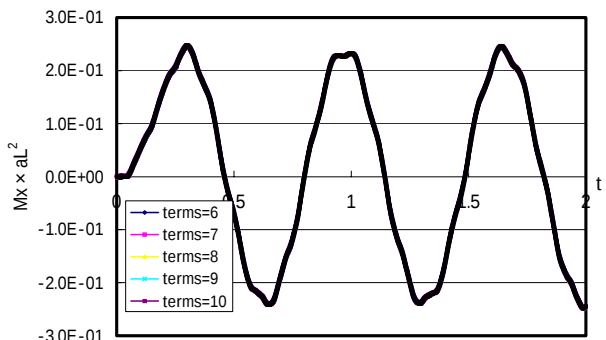


図-2 Timoshenko 梁の振動数と h/L の関係に与える曲げモードとせん断モードの影響: S-S



a) スパン中央での動たわみに与えるモード数の影響: $h/L=0.2$



b) スパン中央での曲げモーメントに与えるモード数の影響: $h/L=0.2$

図-3 ステップ分布荷重 q を受ける梁の動たわみと曲げモーメントに与えるモード数の影響: $t_1=0.25$