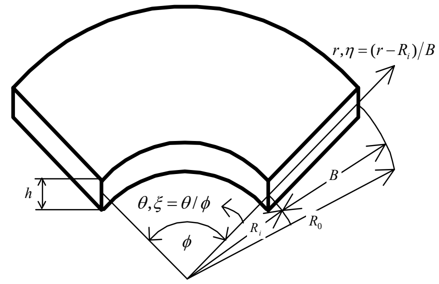
BF-spline Ritz 法を用いた扇形 Mindlin 板の振動解析

大同工業大学　○和田　裕明　大同工業大学　正員　水澤富作

1. はじめに　扇形厚板は曲線スラブなどの構造要素として用いられており，その振動特性を知ることは，設計上重要な課題であるが，薄板問題と比較して，任意の境界条件を有する扇形厚板の振動解析はさほど多く研究されていない．有限要素法を適用した研究を除くと，Xiang ら [1)]は，直交多項式を Ritz 法の許容関数に用いて扇形 Mindlin 板の振動解析を行っている．また Liew ら [2)]は，自由辺を含まない境界条件を持つ扇形 Mindlin 板の振動解析への Differential quadrature 法の適用について検討している．また，水澤ら [3)]は，spline 要素法を用いて変厚扇形 Mindlin 板の振動解析を報告している．最近，名木野ら [4)]は，k–1 次の任意の B-spline 関数が幾何学的境界条件を自動的に満足するように，境界関数と B-spline 関数を組み合わせた許容関数を定義し，これを Ritz 法の変位関数に仮定した BF-spline Ritz 法を定式化し，長方形 Mindlin 板の振動解析を行っている．



図－1　扇形板と極座標系

本研究では，任意の境界条件を有する扇形 Mindlin 板の振動解析への BF-spline Ritz 法を適用し，解の収束性や解析精度について検討を行い，本手法の有用性及び解の妥当性について明らかにしている．

2．BF-spline Ritz 法による定式化　Mindlin 板理論で仮定される 3 つの独立した変位関数(たわみ w と 2 つの回転角(ϕ_o, ϕ_r)は，境界関数と B-spline 関数を掛け合わせた許容関数で表し，無次元極座標系($\xi=\theta/\phi$, $\eta=(r-R_i)/B$)を用いれば，それぞれ次式で仮定される．

$$\phi_\theta(\xi,\eta)=F_\theta(\xi)G_\theta(\eta)\sum_{m=1}^{i_\theta}\sum_{n=1}^{i_r}A_{mn}N_{m,k}(\xi)N_{n,k}(\eta),$$

$$\phi_r(\xi,\eta)=F_r(\xi)G_r(\eta)\sum_{m=1}^{i_\theta}\sum_{n=1}^{i_r}B_{mn}N_{m,k}(\xi)N_{n,k}(\eta),\quad w(\xi,\eta)=F_z(\xi)G_z(\eta)\sum_{m=1}^{i_\theta}\sum_{n=1}^{i_r}C_{mn}N_{m,k}(\xi)N_{n,k}(\eta) \tag{1}$$

ただし，$N_{m,k}(\xi)$, $N_{n,k}(\eta)$は，$k-1$ 次の正規化された B-spline であり，A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} はそれぞれ未定係数である．$i_\theta=k-2+m_\theta$，$i_r=k-2+m_r$，$k-1$ は B-spline 関数の次数，m_θ と m_r はそれぞれξ方向とη方向に設けた区分点の数である．また，$F_i(\xi)$と $G_i(\eta)$は，それぞれ幾何学的境界条件を満たす境界関数である [4)]．

等方性である扇形 Mindlin 板のひずみエネルギーU と運動エネルギー Tは，それぞれ次式で与えられる．

$$\begin{aligned}U=\frac{D\phi}{2}\int_0^1\!\!\int_0^1\Bigg\{&A\left(\frac{\partial\phi_r}{\partial\mu}\right)^2+\nu\left\{\left(\frac{\partial\phi_r}{\partial\eta}\right)\left(\frac{1}{\phi}\frac{\partial\phi_\theta}{\partial\xi}+\phi_r\right)+\left(\frac{1}{\phi}\frac{\partial\phi_\theta}{\partial\xi}+\phi_r\right)\left(\frac{\partial\phi_r}{\partial\eta}\right)\right\}+\frac{1}{A}\left(\frac{1}{\phi}\frac{\partial\phi_\theta}{\partial\xi}+\phi_r\right)^2\\&+\frac{1-\nu}{2}\frac{1}{A}\left\{\phi_\theta-A\left(\frac{\partial\phi_\theta}{\partial\eta}\right)-\frac{1}{\phi}\left(\frac{\partial\phi_r}{\partial\xi}\right)\right\}^2+6\kappa(1-\nu)\left(\frac{B}{h}\right)^2\left[A\left\{\left(\frac{h}{B}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial\eta}\right)+\phi_r\right\}^2+\frac{1}{A}\left\{\frac{h}{B\phi}\left(\frac{\partial W}{\partial\xi}\right)+A\phi_\theta\right\}^2\right]\Bigg\}\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\xi\\=\frac{D\phi}{2}&\{\Delta\}_{mn}^{\mathrm{T}}[K]_{mnrs}\{\Delta\}_{rs}\end{aligned} \tag{2}$$

$$T=\frac{1}{2}\rho h\omega^2h^2B^2\phi\int_0^1\!\!\int_0^1\left(W^2+\frac{1}{12}(\phi_\theta{}^2+\phi_{\mathrm{r}}{}^2)\mathrm{A}\right)\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2}\rho h\omega^2h^2B^2\phi\{\Delta\}_{mn}^{T}[M]_{mnrs}\{\Delta\}_{rs} \tag{3}$$

ここで，$A=(\eta+1/(\delta-1))$，$\delta=R_o/R_i$, $B=R_o-R_i$, D, h, ν はそれぞれ板の曲げ剛性，板厚およびポアソン比である．また，ρ,ω,κ はそれぞれ密度，円振動数とせん断修正係数である．$[K]_{mnrs}$ はと$[M]_{mnrs}$は，剛性行列と質量行列ある．

扇形 Mindlin 板の全ポテンシャルエネルギーΠは，$\Pi=U-T$ で与えられるので，Ritz 法を適用して，Πを未定係数ベクトルで極値化すれば，次の線形代数方程式が得られる．

$$\partial\Pi/\partial\{\Delta\}_{rs}^{\mathrm{T}}=[K]_{mnrs}\{\Delta\}_{mn}-n^{*2}[M]_{mnrs}\{\Delta\}_{mn}=0\;;\;m,r=1,2,\ldots,i_\theta,\quad n,s=1,2,\ldots,i_r \tag{4}$$

ここで，$n^*=\omega B^2\sqrt{\rho h/D}$ である．

3．数値計算例および考察　数値計算例では，$\nu=0.3$，$\kappa=5/6$ に仮定し，周辺固定された扇形厚板の振動解析について示す．

表-１には，中心角ϕが 30^o，半径比 R_o/R_i が 2 である周辺固定された扇形 Mindlin 板の振動数パラメータ

$n^*=\omega B^2\sqrt{\rho h/D}$ の収束性に与える spline 次数 k-1 と区分点の数 m_θ と m_r の影響が示してある．ただし，幅厚比 B/h を 600 と 6 に仮定し，k-1 は 4 次と 5 次として，$m_\theta=m_r$ は 7 から 13 まで変化させている．また，比較のために，直交多項式を Ritz 法の変位関数に用いた Xiang らの数値解も列記してある．これより，幅厚比の大きさに関係なく，区分点の数を増大すると一定値に向かった一様な収束状態が示され，また spline 次数を高めると，少ない区分点の数で収束値が得られている．得られた収束値は，Xiang らの数値解と比較して，良く一致した結果が得られている．

表-2 は，中心角φが 30°である周辺固定された扇形 Mindlin 板の振動数パラメータ $n^*=\omega B^2\sqrt{\rho h/D}$ の精度比較を示している．ただし，k-1=4 次，$m_\theta=m_r$ は 21 に仮定し，R_o/R_i を 10 から 2.5 まで変化させている．比較のために，Liew らの differential quadrature 法（DQM）の解 [2] と Xiang らの数値解 [1] が示してある．これより，幅厚比の値に関わらず，本手法の解は，これらの数値解と良く一致した結果が得られている．

表－1 振動数パラメータ n*の収束性：φ=30°, R_o/R_i=2

B/h	k-1	$M_\theta=M_r$	Modes 1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
600	4	7	40.0404	79.0123	80.8678	128.523	138.713	140.396
		9	40.0347	78.9039	80.7936	128.149	136.756	138.080
		11	40.0336	78.8758	80.7788	128.057	136.164	137.358
		13	40.0333	78.8698	80.7758	128.039	136.028	137.181
	5	7	40.0336	78.8804	80.7803	128.070	136.270	137.508
		9	40.0333	78.8694	80.7756	128.039	136.037	137.198
		11	40.0332	78.8681	80.7749	128.035	135.994	137.137
		13	40.0332	78.8679	80.7748	128.034	135.989	137.129
		Ritz法[1]	40.0337	78.8709	80.7676	127.699	135.999	137.120
6	4	7	31.0800	53.9944	54.7369	77.9960	81.5169	82.6264
		9	31.0800	53.9943	54.7369	77.9958	81.5152	82.6241
		11	31.0800	53.9943	54.7369	77.9958	81.5150	82.6239
		13	31.0800	53.9943	54.7369	77.9958	81.5150	82.6239
	5	7	31.0800	53.9943	54.7369	77.9958	81.5152	82.6241
		9	31.0800	53.9943	54.7369	77.9958	81.5150	82.6239
		11	31.0800	53.9943	54.7369	77.9958	81.5150	82.6239
		13	31.0800	53.9943	54.7369	77.9958	81.5150	82.6239
		Ritz法[1]	31.0801	53.9943	54.7369	77.9958	81.5152	82.6242

表－2 周辺固定扇形板の振動数パラメータ n*の精度比較

φ	R_o/R_i	B/h	Modes 1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
30	10	90	187.056	297.337	412.547	424.290	568.805	590.321
		DQM[2]	187.056	297.335	412.551	424.333	569.715	590.374
		9	128.289	183.331	234.414	240.017	297.860	303.995
		DQM[2]	128.289	183.331	234.414	240.017	297.884	303.995
		4.5	81.1774	110.699	136.614	141.531	171.826	173.967
		DQM[2]	81.1770	110.699	136.614	141.531	171.828	173.966
	4	75	187.056	297.337	412.546	424.350	569.755	590.320
		DQM[2]	187.056	297.337	412.547	424.348	569.759	590.325
		7.5	128.290	183.367	234.414	240.452	300.162	303.995
		DQM[2]	128.290	183.366	234.414	240.451	300.161	303.995
		3.75	81.1826	110.764	136.614	141.961	173.468	173.967
		DQM[2]	81.1830	110.764	136.614	141.961	173.469	173.967
	2.5	600	188.357	305.025	417.442	461.053	599.914	671.656
		Ritz法[1]	188.356	305.035	417.393	461.000	596.159	672.007
		6	128.959	188.358	235.349	259.500	305.411	341.569
		Ritz法[1]	128.959	188.358	235.350	259.501	305.411	341.545
		3	81.9225	114.287	137.315	153.223	174.994	194.377
		Ritz法[1]	81.9227	114.287	137.315	153.223	174.994	194.375

図-2 は，扇形 Mindlin 板（φ=30°）の基本振動数パラメータ n^*1 と幅厚比 B/h の関係に与える半径比 R_o/R_i の影響を示している．ここで，R_o/R_i は 2 と 5 に仮定している．これより，R_o/R_i の値が大きいほど，幅厚比の影響を受けるが，板厚が薄くなるにつれて，その影響が小さくなる．

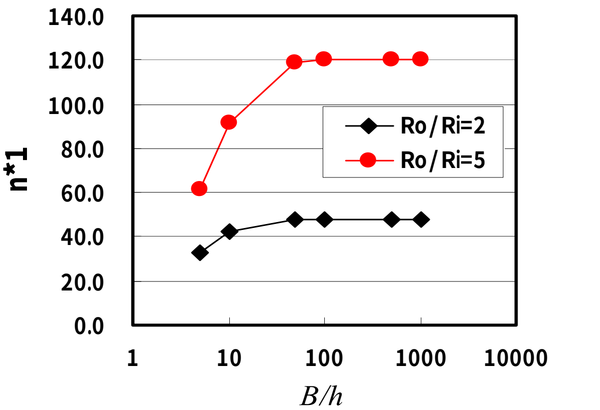


図-2 n*1 と B/h の関係に与える R_o/R_i の影響：φ=30o

4．まとめ 本論文で得られた結果をまとめると，以下の通りである．1) 幾何学的境界条件を自動的に満足させた BF-spline Ritz 法は，一様な収束性を示し，またその収束値は，他の数値解析法の値と良く一致した結果を示す．2) 基本振動数パラメータ n^*1 と幅厚比 B/h の関係に与える半径比 R_o/R_i の影響は，R_o/R_i の値が大きいほど，幅厚比の影響を受けるが，板厚が薄くなるにつれて，その影響が小さくなる．

参考文献 1) Xiang et al.: Transverse vibration of thick annular sector plates. J. Eng. Mech., ASCE, Vol. 119, pp. 1579-1599, 1993. 2) Liew, K.M. and Liu, F.L.: Differential quadrature method for vibration analysis of shear deformable annular sector plates. J. Sound and Vib.,Vol. 230, pp. 335-356, 2000. 3) 水澤他：Spline 要素法を用いた変厚扇形 Mindlin 板の振動解析．構造工学論文集，Vol.45A, pp.1-8, 1999. 4）.名木野他: BF-spline Ritz 法を用いた長方形 Mindlin 板の振動解析，応用力学論文集, Vol. 9, pp. 341-352, 2006.