弾塑性複合材料の巨視的な力学的挙動の予測

信州大学　　　　○都筑　萌
信州大学　正員　　小山　茂
信州大学　正員　大上　俊之

１．はじめに

コンクリート・地盤材料をはじめとして，土木材料の多くは複合材料であり，巨視的には均一にであっても微視的には内部構造を有している．そのような材料からなる構造物を解析するにあたって，第一に知りたい情報は全体としてどう動くかという巨視的な挙動であるが，巨視的挙動は微視構造が示す挙動を反映したものとして現れるため，たとえ全体に対するスケールが小さくてもその性質は無視することは出来ない．このことから，本研究では微視構造の情報を適切に考慮して，複合材料を最も良く表す単一の材料へ置き換えることで，巨視的な力学的挙動を予測する方法を示す.

２．解析対象とモデル化

本研究では図１に示すような，全体に占める体積比率が f_1 の材料１と f_2 の材料２の二種類の材料からなる複合材料を扱い，特に母材・介在物が存在しないような結晶構造や，介在物の体積分率が大きく，母材と介在物を区別することが困難な場合を解析対象とする．このような材料をモデル化するにあたり，架空の母材を導入して，三相の複合材料とする．こうすることで，どちらの材料も介在物となり，２つの材料を同格として扱うことができるようになる．このモデルを定式化した後，母材の体積を０にすることで，元の解析対象である複合材料を扱えるものとする.

３．定式化

(１)等価介在物法と森-田中の理論

森-田中の理論[1)]によると，母材と介在物における応力速度・ひずみ速度の関係は，平均量を用いると

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_M = \mathbf{C}_M \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_D \quad , \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{Ii} = \mathbf{C}_{Ii}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{Ii} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p_{Ii}) \tag{1}$$

と表すことができる．ここに $\mathbf{C}_M,\mathbf{C}_{Ii}$ は母材および介在物の弾性係数テンソル， $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_M,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_D$ は母材の応力速度・ひずみ速度， $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{Ii},\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{Ii}$ は介在物 i の応力速度・ひずみ速度， $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p_{Ii}$ は介在物の塑性ひずみ速度を表す．ここに $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_D$ は単なる母材における平均ではなく，介在物同士の相互作用をすべて含んだ上での平均量であることに注意する．つまり，介在物同士の相互作用はすべて母材が受け持つと考えている.

介在物のひずみ速度は，母材のひずみ速度と母材と介在物の相互作用による乱れ $\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{Ii}$ との和で，

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{Ii} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_D + \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{Ii} \tag{2}$$

と表す．ここで，母材が等方弾性体で介在物の形状が回転楕円体とすれば，等価介在物法[2)]を用いて，介在物の応力が

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{Ii} = \mathbf{C}_{Ii}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_D + \dot{\boldsymbol{\gamma}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p_{Ii}) = \mathbf{C}_M\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_D + \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{Ii} - (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p_{Ii} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*_i)\} \tag{3}$$

と表すことができる．ここで $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*_i$ は，eigen ひずみと呼ばれる塑性ひずみのようなもので，上式の第二項目と第三項目で表した介在物の応力が等しくなるように決めらる量である．また，ひずみの乱れと以下のような関係となることが Eshelby によって示されている[3)].

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}_i = \mathbf{S}_i(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p_{Ii} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*_i) \tag{4}$$

ここで $\mathbf{S}_i$ は Eshellby のテンソルと呼ばれ，回転楕円体形状と母材のポアソン比のみによって決まる定数パラメータである.

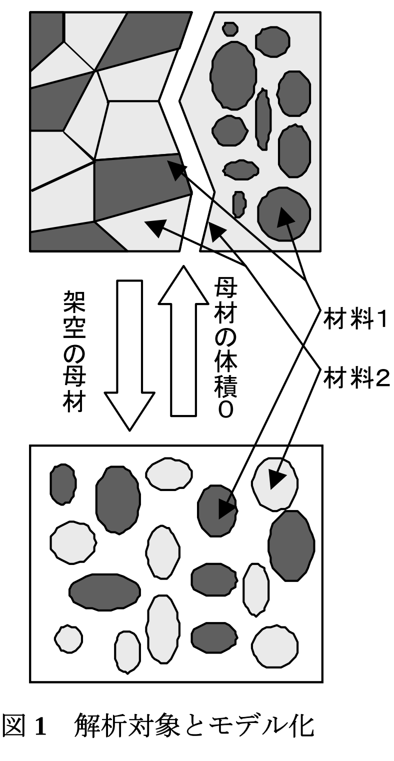

図１　解析対象とモデル化

(２)弾塑性材料の構成式

介在物は von Mises の降伏条件に従うものとして，

$$f_i \equiv \sqrt{(J_2)_i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\sigma_{Yi} + h_i\left(\bar{\varepsilon}^p_i\right)^{n_i}\right\} = 0 \tag{5}$$

で降伏関数を定義する．ここに $(J_2)_i$ は偏差応力の第２不変量， σ_{Yi} は単純引張の降伏応力， $\bar{\varepsilon}^p_i$ は相当塑性ひずみ， n_i,h_i は硬化パラメータである.

これにより，平均塑性ひずみ増分はPrandtl-Reussの関連流れ則に従い，以下のように表すことができる．

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^p = \frac{1}{H_i}\frac{\boldsymbol{\sigma}'_{Ii}\otimes\boldsymbol{\sigma}'_{Ii}}{4(J_2)_i}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_i \quad , \quad H_i = \frac{h_i n_i}{\left(\sqrt{3}\right)^{n_i+1}}\left(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^p\right)^{n_i-1} \tag{6}$$

ここで$\boldsymbol{\sigma}'_{Ii}$は偏差応力で，$\otimes$はテンソル積を表す．また，Hは硬化係数である．

(３)巨視的剛性と母材の影響

巨視的な応力速度とひずみ速度を，母材と介在物の体積比率を重みとした平均によって

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \equiv (1-f_1-f_2)\dot{\boldsymbol{\sigma}}_M + f_1\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{I1} + f_2\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{I2} \tag{7}$$
$$\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \equiv (1-f_1-f_2)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{D}} + f_1\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{I1} + f_2\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{I2}$$

と定義する．式(1)から式(7)により，材料の平均応力増分平均ひずみ増分関係が

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathbf{X}\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \tag{8}$$

のような形式で表すことができる．式の形から$\mathbf{X}$は巨視的な接線剛性と解釈することができ，これにより複合材料の巨視的挙動の予測が可能となるが，先に示したように母材の体積を０としても，母材の材料パラメータが残ってしまい$\mathbf{X}$を適切に決めることができない．そこで，

$$U = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\ \mathbf{W}^S\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{9}$$

で定義される弾性エネルギーの増加分を考える．上式の係数$\mathbf{W}^S$は母材の材料パラメータによって表されているため，このUを最小にするという条件から求めることにする．

４．数値解析例

ここでは，Wengらが行った実験値[4)]との比較を行った．対象はエポキシ - シリカ複合材で，各材料のヤング率とポアソン比はそれぞれ，$E_1 = 3.16$(GPa)，$E_2 = 73.1$(GPa)，$\nu_1 = 0.35$，$\nu_2 = 0.18$，材料１の単純引張の降伏応力，硬化パラメータは，$\sigma_{Y1} = 75.86$(GPa)，$h_1 = 32.18$，$n_1 = 0.26$で，文献より引用した．

図２は相当応力-相当塑性ひずみ関係であり，材料2の体積分率を$f_2 = 0.00$，0.15，0.35，0.47に対してプロットしたものである．曲線はいずれも，相当塑性ひずみの増加にしたがい傾きがほぼ一定となる．図より明らかなように，解析結果は実験値を良い精度で表しているといえる．

また図３に，特に工学的には意味はないが，架空の母材のヤング率とポアソン比を相当塑性ひずみに対してプロットしたものを示す．相当応力-相当塑性ひずみ関係の傾きが一定になるあたりから，それぞれの値はある一定の値に近づいていることがわかる．

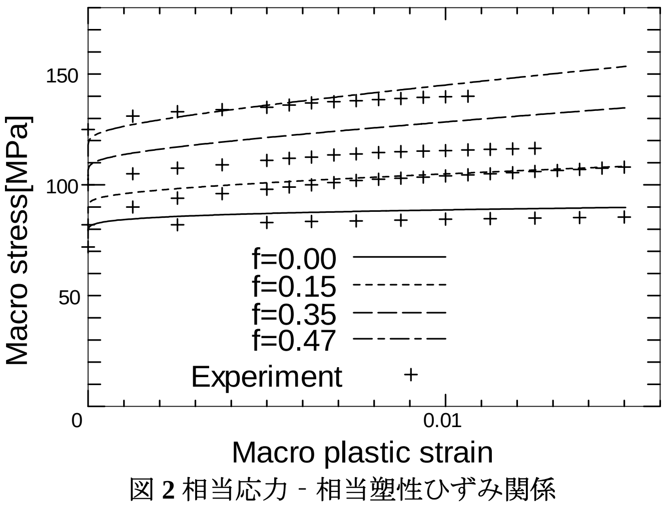

図 **2** 相当応力 - 相当塑性ひずみ関係

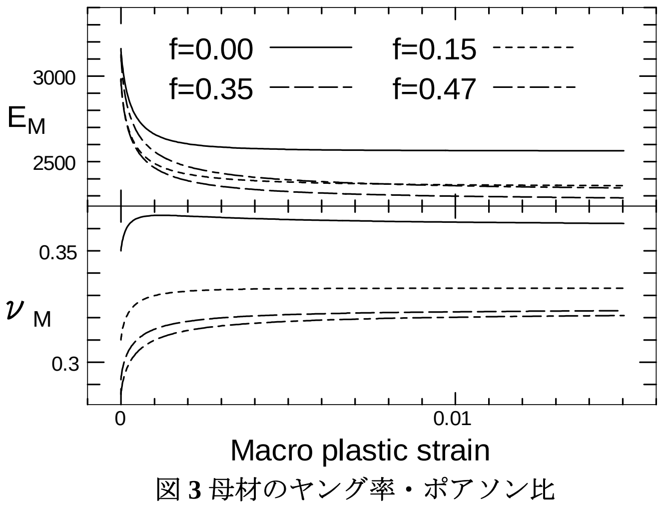

図 **3** 母材のヤング率・ポアソン比

参考文献

1) Mori, T. and Tanaka, K. : Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions, *Act. Metall.*, Vol.21, pp.571-574, 1973.
2) Mura, T. : *Micromechanics of Defects in Solids*, Martinus Nijhoff Publ, 1982.
3) Eshelby, J. D. : The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems, *Proc. Roy. Soc. London.* , Vol.A241, pp.376-396, 1957.
4) Tandon, G.P., Weng, R.L.:A Theory of Particle-Reinforced Plasticity, *J. Appl. Mech.*, ASME Vol.55, pp.126-135.