

バックグラウンドセル生成を利用した PIM によるエレメントフリー法

信州大学大学院 ○津金慎也

信州大学工学部 正会員 大上俊之

信州大学工学部 正会員 小山 茂

1. はじめに

近年、要素分割を必要としないエレメントフリー法 (*EFGM*) に関する研究が工学のさまざまな分野で行われている。*EFGM* は関数近似に移動最小二乗法を用いることによりメッシュレス化を可能としている手法であるが、基本境界条件の適用に特別な処理を必要とする、領域積分のためのバックグラウンドセルの設定に工夫を要する等の問題を有している。

本研究では、これらの問題を解決するために、*FEM* での要素自動生成法をバックグラウンドセルの生成に導入し、*PIM*[1]によるエレメントフリー法解析を行い、その適用性について検討する。

2. PIM (Point interpolation method)

エレメントフリー法で一般的に用いられる最小二乗法に代わって、*PIM* を用いて内挿近似し、エレメントフリー法の定式化を行う。*PIM* では影響領域内における節点数と同じ次数の多項式で内挿近似するため、重み関数を用いないで境界条件を評価できる。また、節点を必ずしも格子状に設置する必要がないので解析対象の形状により柔軟性がある。

*PIM*では領域内の任意の位置 x における関数値 u を評価点 x_Q の周辺(影響領域)にある節点を用いて次のように内挿する。

$$u(x, x_Q) = \sum_{i=1}^n p_i(x) a_i(x_Q) = \mathbf{p}^T \mathbf{a}(x_Q) \quad (1)$$

$$\mathbf{a}^T(x_Q) = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n] \quad (2)$$

ここに、 $p_i(x)$ は単項式、 n は影響領域内の節点数、 $a(x_Q)$ は $p_i(x)$ の係数である。

関数 $p_i(x)$ は 2 次元の場合、影響領域内の節点数に応じて以下のように設定される。

$$\mathbf{p}^T(x) = [1, x, y, xy, x^2, y^2, x^2y, xy^2, x^3, \dots] \quad (3)$$

式(1)から節点 i での関数値 u_i が次のように得られる。

$$u_i = \mathbf{p}^T(x_i) \mathbf{a}, \quad i = 1 - n \quad (4)$$

上式をマトリックス表示すると

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{P}_Q \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{P}_Q^{-1} \mathbf{u}^e \quad (5)$$

ここに

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^e &= [u_1, u_2, u_3, \dots, u_n]^T \\ \mathbf{P}_Q^T &= [p(x_1), p(x_2), p(x_3), \dots, p(x_n)] \end{aligned} \quad (6)$$

となり、これを用いて関数 u が次のように表記できる。

$$u(x) = \phi(x) \mathbf{u}^e \quad (7)$$

ここに内挿関数として ϕ が次のように得られる。

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \mathbf{p}^T(x) \mathbf{P}_Q^{-1} \\ &= [\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)] \end{aligned} \quad (8)$$

得られた内挿関数 $\phi_i(x)$ は次式を満足する。

$$\begin{aligned} \phi_i(x = x_i) &= 1, \quad i = 1 - n \\ \phi_j(x = x_i) &= 0, \quad j \neq i \\ \sum_{i=1}^n \phi_i(x) &= 1 \end{aligned} \quad (9)$$

式(7)をつりあり式の弱形式に代入し、バックグラウンドセルを単位として領域積分することによって、以後、*FEM* 解析と同様の手順で定式化を行えばよいことになる。

3. バックグラウンドセルの生成

ここでは、*Cheng* [2] の要素自動生成法をバックグラウンドセルの設定に適用する。解析対象を矩形から成るサブ領域の集合体と見なす。それぞれのサブ領域を 6 つの領域に分割すると、各サブ領域に対して、境界边上の節点数 N_i と内部边上の節点数 E_{ij} について以下の関係式が成り立つ (図-1)。

$$\text{領域 } F : \begin{cases} E_{1F} = E_{4F} = N_4 - 1 \\ E_{2F} = E_{3F} \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{領域 } D : \begin{cases} E_{1D} = E_{3D} = E_{4B} = E_{1B} = K_1 \\ E_{2D} = E_{4D} = 1 \end{cases} \quad (11)$$

$$\text{領域 } E : \begin{cases} E_{1E} = E_{2E} = E_{4C} = E_{1C} = K_2 \\ E_{3E} = E_{4E} = 1 \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{領域 } C : \begin{cases} E_{1C} = E_{4C} = K_2 \\ E_{2C} = E_{3C} = N_3 - 3 \end{cases} \quad (13)$$

$$\text{領域 } B : \begin{cases} E_{1B} = E_{4B} = K_1 \\ E_{2B} = E_{3B} = N_2 - 3 \end{cases} \quad (14)$$

$$\text{領域 } A : \begin{cases} E_{1A} = E_{4A} = N_4 - 3 \\ E_{2A} = E_{3B} + E_{3D} = N_2 - 3 + K_1 \\ \quad = E_{3A} = E_{2C} + E_{2E} \\ \quad = N_3 - 3 + K_2 \end{cases} \quad (15)$$

ここに、 K_1 および K_2 は未知変数、 N_i は境界辺 i 上の節点数、 E_{ij} はサブ領域内において分割された領域 j の境界辺 i に対する辺の節点数を示している。

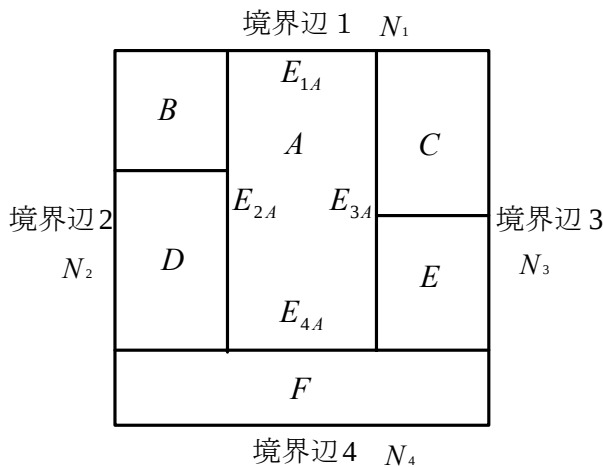


図-1 6分割されたサブ領域

式 (10) ~ (15) を整理すると、 K_1, K_2 について以下の式が得られる。

$$\begin{cases} K_1 = (N_1 - N_2 + N_3 - N_4 + 2)/2 \\ K_2 = (N_1 + N_2 - N_3 - N_4 + 2)/2 \end{cases} \quad (16)$$

すなわち、 K_1, K_2 は境界上の節点を与えることによって求めることができ、これから、サブ領域内の分割された各領域の節点数 E_{ij} が境界上の節点 N_i と K_1, K_2 から決定されることになる。

内部節点 i の座標 (x_i, y_i) は次の式によって求められる。

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{N_i(2-\omega)} \sum_{n=1}^{N_i} (x_{nj} + x_{nl} - \omega x_{nk}) \\ y_i &= \frac{1}{N_i(2-\omega)} \sum_{n=1}^{N_i} (y_{nj} + y_{nl} - \omega y_{nk}) \end{aligned} \quad (17)$$

ここに、 N_i は節点 i を含むバックグラウンドセルの数、添え字 nk はバックグラウンドセル n について節点 i の対角上の節点、添え字 nj, nl はその他の節点である(図-2)。 ω は重み係数で $0 \leq \omega \leq 1$ である。

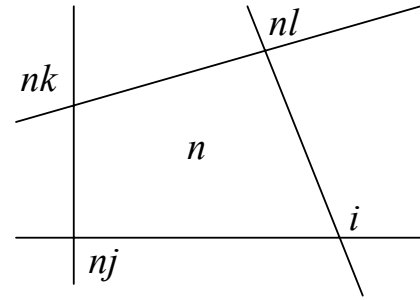


図-2 内部点 i 近傍の節点

図-3 にバックグラウンドセルの生成例を示す。
PIMによるエレメントフリー解析の結果については当日報告する予定である。

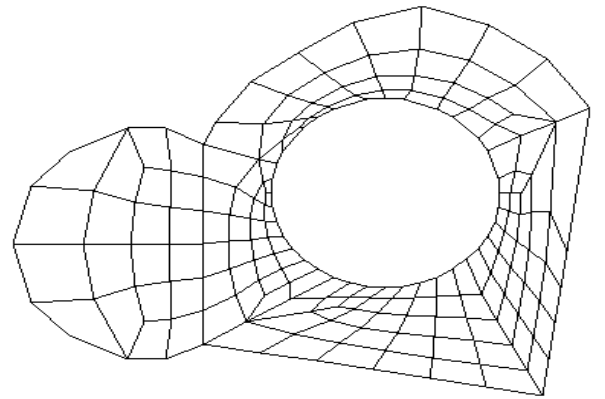


図-3 バックグラウンドセル生成例

参考文献

- 1) G.R.Liu and Y.T.Gu, A point interpolation method for two-dimensional solids, *int.J. num.methods eng.*, Vol50, pp937-951,2001
- 2) G.Cheng and H. Li, New method for graded mesh generation of quadrilateral finite elements, *Computers & Structures*, Vol.59, No.5, pp.823-829,1996