

## Wavelet 変換の損傷テンソル同定解析への適用

信州大学大学院

○丸傳健太

信州大学工学部

正会員

大上俊之

信州大学工学部

正会員

小山 茂

## 1. はじめに

岩盤などの不連続性を評価するために節理等の中間規模の不連続面を岩盤の損傷として扱う損傷理論がある[1]. 本研究では不連続性による損傷効果を示す損傷テンソルを観測値から逆に推定する同定解析を行うことを試みる. システム方程式にウェーブレット変換を適用し, 近似逆行列の導出を行うことによって, 不適切な長方形型のシステム行列を有する問題にも適用できる解析手法を提案する.

## 2. 損傷テンソル逆解析モデル

損傷力学理論においては不連続面を損傷テンソルと呼ばれる 2 階の対称テンソル  $\Omega$  で定量化することにより, 不連続性岩盤の挙動を連続体力学の枠内で取り扱う.

損傷理論における有限要素法の剛性方程式は次式となる.

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} + \mathbf{F}^* \quad (1)$$

ここに

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_V \mathbf{B}' \mathbf{D} \mathbf{B} dv \\ \mathbf{F} &= \int \mathbf{N}' \hat{\mathbf{t}} dS \\ \mathbf{F}^* &= \left( \int_V \mathbf{B}' \Gamma(\Omega) \mathbf{D} \mathbf{B} dv \right) \mathbf{U} \end{aligned} \quad (2)$$

である.  $\mathbf{K}$  は実質部分の材料特性だけに依存しており不連続面損傷効果は付加的な節点荷重ベクトル  $\mathbf{F}^*$  で表現される.  $\Gamma$  は 2 次元問題の場合,

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & 0 & \Omega_{12} \\ 0 & \Omega_{22} & \Omega_{12} \\ \frac{1}{2}\Omega_{12} & \frac{1}{2}\Omega_{12} & \frac{1}{2}(\Omega_{11} + \Omega_{22}) \end{bmatrix} \quad (3)$$

となるマトリックスである.

ここでは, 有限要素法の順解析によって得られる節点変位を観測データとして, 観測データから逆に損傷テンソルを推定する同定問題を逆解析モデルとする. この場合, FEM のつりあい方程式は

$$\begin{aligned} (\mathbf{K} - \mathbf{L}(\mathbf{P}))\mathbf{U} &= \mathbf{F} \\ \mathbf{L} &= \int_V \mathbf{B}' \Gamma(\Omega) \mathbf{D} \mathbf{B} dv \end{aligned} \quad (4)$$

となる. ここに  $\mathbf{P}$  は未知のパラメータ  $\Omega_{ij}$  をベクトル表現したものである. 観測境界条件式は次のように離散化される.

$$\mathbf{S}_u \mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}} \quad (5)$$

ここに,  $\bar{\mathbf{U}}$  は該当する節点の測定データであり,  $\mathbf{S}_u$  は観測節点を選択するマトリックスである. 未知のベクトル  $\mathbf{P}$  を決定するために式 (4), (5) に対して, Newton 法を適用することにより  $k$  回目の繰り返し計算ステップに対して, 逆解析のシステム方程式が

$$\mathbf{G} d\mathbf{x} = \mathbf{R} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K} - \mathbf{L}(\mathbf{P}^k) & \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{P}} \mathbf{U} \right)^k \\ \mathbf{S}_u & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} d\mathbf{U}^k \\ d\mathbf{P}^k \end{bmatrix}, \\ \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}^k - (\mathbf{K} - \mathbf{L}(\mathbf{P}^k))\mathbf{U}^k \\ \bar{\mathbf{U}} - \mathbf{S}_u \mathbf{U}^k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と得られる. システムマトリックス  $\mathbf{G}$  に対してウェーブレット変換を適用して近似逆行列を求め, 損傷テンソルを同定する.

## 3. Wavelet 変換による近似逆行列の導出

今,  $n$  行  $n$  列の正方マトリックス  $\mathbf{A}$  を考えると,  $\mathbf{A}$  に対するウェーブレット変換は, 基底関数の線形変換によって得られるウェーブレット変換マトリックス  $\mathbf{W}$  を用いて次のように与えられる.

$$\mathbf{A}' = \mathbf{W} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{W}^T \quad (7)$$

ここに,  $\mathbf{A}'$  はウェーブレットスペクトラムである. 一般にウェーブレットスペクトラムは 1 行 1 列の近傍に絶対値の大きい値が分布する. これは, 元のマトリックスの持つ情報がウェーブレット変換によって 1 行 1 列近傍に集約されていることを表している. 得られたウェーブレットスペクトラムに逆ウ

ウェーブレット変換を行うことによって以下のように元のマトリックス  $\mathbf{A}$  が得られる.

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{W} \quad (8)$$

ここで, ウェーブレット変換のデータを集約する特徴を利用し, 1 行 1 列を起点としてある程度の大きさにスペクトラムを切り出すことによりデータの圧縮が可能となる. 本研究ではこのデータ圧縮を利用して, 非正則行列の近似逆行列を求める.

まず, システム行列  $\mathbf{G}$  ( $n$  行  $m$  列) に  $l$  行  $l$  列のゼロマトリックスを重ね合わせ  $\mathbf{G}_{+zero}$  ( $l$  行  $l$  列) を求める.  $\mathbf{G}_{+zero}$  をウェーブレット変換し,  $\mathbf{G}'$  を得る.  $\mathbf{G}'$  に対して任意の大きさにスペクトラム  $\mathbf{G}'_{cut}$  を切り出し,  $\mathbf{G}'_{cut}$  に対して逆行列  $\mathbf{G}'_{cut}{}^{-1}$  をとる.  $\mathbf{G}'_{cut}{}^{-1}$  に  $l$  行  $l$  列のゼロマトリックスを重ね合わせた  $\mathbf{G}'_{cut+zero}{}^{-1}$  に対して逆ウェーブレット変換し,  $\mathbf{G}_{cut+zero}^{-1}$  ( $l$  行  $l$  列) を求める.  $\mathbf{G}_{cut+zero}^{-1}$  から  $m$  行  $n$  列のマトリックスを切り出せば  $\mathbf{G}$  の近似逆行列  $\mathbf{G}_{app}^{-1}$  ( $m$  行  $n$  列) が得られる.

図-1 に示す円形トンネルを解析モデルとし, 順解析で求めた変位解を測定変位として与え, 損傷テンソルを同定する. 母岩材は弾性体とし, 岩盤には, 図-2 に示すような 2 つの節理群が存在するとし, 母岩材の材料定数, 節理群の面密度およびその法線ベクトルは次の値を入力データとして与えた.

母岩材 : ヤング率  $E = 100$  (Mpa)  
ポアソン比  $\nu = 0.25$

$$\text{節理群 1 : } \Omega_1 = 0.3, \mathbf{n}_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$\text{節理群 2 : } \Omega_2 = 0.4, \mathbf{n}_2 = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0 \right)$$

これより同定すべき岩盤の損傷テンソルの値は

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{12} & \Omega_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.283 & 0.339 \\ 0.339 & 0.417 \end{bmatrix}$$

となる.

未知パラメータの数が 3 個に対して, ●印で示す 2 つの節点の  $x, y$  方向変位を観測値とした. ウェーブレットの基底関数として Coifman の 24 次基底関数を用い, データ圧縮は行わないものとした. 表-1 に損傷テンソルの真値と計算結果を示すが, 精度

良い同定値が得られていることがわかる.

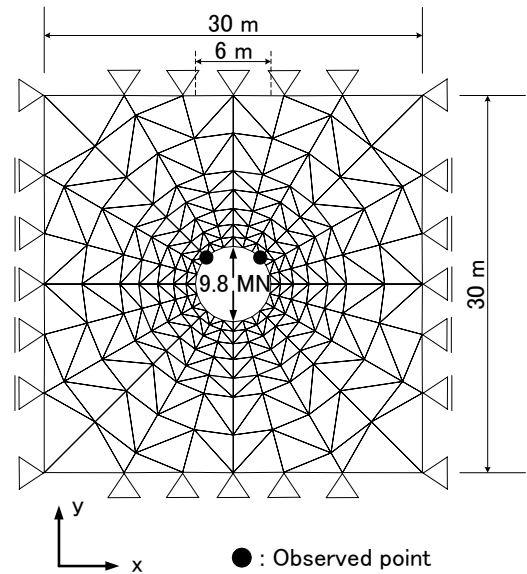


図-1 解析モデル

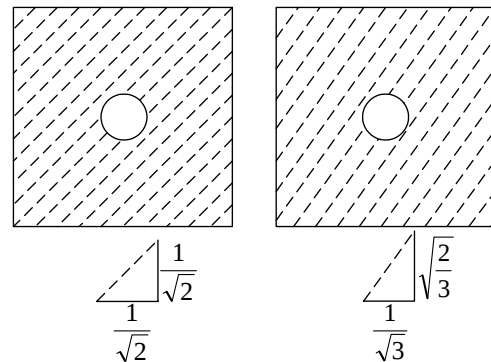


図-2 想定した節理群の方向

| 損傷テンソル        | 真値    | 初期値 | 同定値     |
|---------------|-------|-----|---------|
| $\Omega_{11}$ | 0.283 | 0.1 | 0.28375 |
| $\Omega_{22}$ | 0.417 | 0.1 | 0.41516 |
| $\Omega_{12}$ | 0.339 | 0.1 | 0.34033 |

表-1 損傷テンソルの真値と同定値

#### 参考文献

- 1) Doi T., Hayano S. and Saito Y., Wavelet solution of the inverse source problems IEEE Transactions on Magentics, 33 No.2 1935-1938, 1997
- 2) Kawamoto T., Ichikawa Y. and Kyoya T., Deformation and fracturing behavior of discontinuous rock mass and damage mechanics theory, Int. Jour. Num. Anal. Meth.. Geomech.