

# 新しい三次元時間領域動弾性境界要素法と超音波 NDT シミュレーションへの適用性

○福井大学大学院 正会員 齋藤 隆泰  
 福井大学大学院 学生会員 石田貴之  
 東京工業大学大学院 正会員 廣瀬壮一  
 福井大学大学院 正会員 福井卓雄

## 1. はじめに

本論文では新しい三次元時間領域動弾性境界要素法と、超音波を用いた非破壊評価 (NDT) シミュレーションへの適用性について述べる。境界要素法は、無限領域を容易に扱える唯一の数値解析手法であり、境界のみの離散化で解析できるため、問題の自由度を比較的少なく計算することが出来る。そのため、著者らのグループでは、境界要素法 (BEM) を超音波 NDT シミュレーションにおける有効な数値解析手法として用いてきた。しかしながら、その時間領域境界要素法は、時間ステップが小さい時に数値的に不安定になることが知られている。そこで、本研究では、Lubich が提案した、繰込み積分を精度良く安定に計算できる手法である演算子積分法 (OQM) を三次元時間領域動弾性境界要素法に適用する。また、散乱問題を解くことにより本手法の有効性、超音波 NDT シミュレーションへの適用性について検討する。

## 2. 三次元時間領域動弾性境界要素法

図 1 のような均質等方な三次元弾性波動場における外部散乱問題を考える。外部領域を  $B$ 、散乱体の境界を  $S$  とする。入射波  $u^{in}$  が散乱体  $D$  により反射・散乱された時、時刻  $t$  における全変位場  $u(x, t)$  に対する時間領域境界積分方程式は、対応する表面力  $t$  を用いて以下のように表される。

$$C_{ij}(x)u_j(x, t) = u_i^{in}(x, t) + \int_S U_{ij}(x, y, t) * t_j(y, t) dS_y - \int_S T_{ij}(x, y, t) * u_j(y, t) dS_y \quad (1)$$

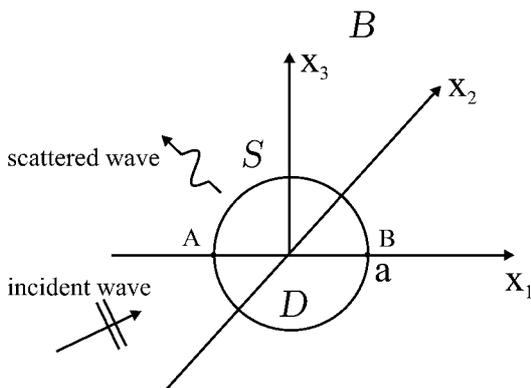


図-1 三次元無限弾性体  $B$  中の散乱体  $D$

ただし、 $C_{ij}$  は自由項であり、 $U_{ij}$  及び  $T_{ij}$  は三次元時間領域動弾性問題に対する基本解及び二重層核である。また、 $*$  は繰込み積を表す。通常、式 (1) を時・空間に離散化し、代数方程式に帰着させることで境界上の未知量を決定することが出来る。しかしながら、式 (1) の繰込み積分を精度良く、安定に計算することは、容易ではない。そのため、本研究では、Lubich<sup>2)</sup> が提案した演算子積分法 (OQM) を式 (1) に用いることを考える。

## 3. 演算子積分法を用いた三次元時間領域動弾性境界要素法

Lubich<sup>2)</sup> は繰込み積分

$$f * g(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau, \quad t \geq 0 \quad (2)$$

の近似値を離散化繰込み積分

$$f * g(n\Delta t) \simeq \sum_j \omega_{n-j}(\Delta t)g(j\Delta t) \quad (3)$$

により計算する場合の重み  $\omega_j(\Delta t)$  の決定法として、 $f$  の Laplace 変換を導入し、一部の積分を差分積分に置き換える手法を提案した。この方法によれば、重みの近似値は時間増分  $\Delta t$  に対して

$$\omega_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\rho} F\left(\frac{\delta(\xi)}{\Delta t}\right) \xi^{-n-1} d\xi \simeq \frac{\rho^{-n}}{L} F\left(\frac{\delta(\xi)}{\Delta t}\right) e^{-\frac{2\pi i n l}{L}} \quad (4)$$

により計算される。ここに、 $F$  は  $f$  の Laplace 変換であり  $\delta(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j \xi^j$  は利用する差分法 (線形マルチステップ法) の生成多項式の商である。また  $\xi_l = \rho e^{2\pi i l/L}$  であり、 $\rho$  は目標とする精度により決定されるパラメータ、 $L$  は定数である。演算子積分法を時間領域境界積分方程式 (1) に適用するには、境界上に近似基底  $\phi_I$  を導入し、式 (3) により繰込み積分の近似表現を求めればよい。それらの結果だけ示せば、結局、第  $n$  ステップ目において、式 (1) は

$$C_{ij} \sum_I \phi_I(x) u_{i,I}(n\Delta t) = u_i^{in}(x, n\Delta t) + \sum_I \sum_{k=1}^n \left[ A_{ij,I}^{n-k}(x) t_{j,I}(k\Delta t) - B_{ij,I}^{n-k}(x) u_{j,I}(k\Delta t) \right] \quad (5)$$

となる。ただし、式 (5) において、 $A_{ij,I}^m$ 、 $B_{ij,I}^m$  は影響関数である。影響関数  $A_{ij,I}^m$ 、 $B_{ij,I}^m$  は式 (3) の離散化繰込み積分

とその重み表現式(4)を用いた演算子積分法により、それぞれ次のように得ることができる。

$$A_{ij,I}^m(\mathbf{x}) = \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_S \hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_{l,\beta}) \phi_I(\mathbf{y}) e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} dS_{\mathbf{y}} \quad (6)$$

$$B_{ij,I}^m(\mathbf{x}) = \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_S \hat{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_{l,\beta}) \phi_I(\mathbf{y}) e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} dS_{\mathbf{y}} \quad (7)$$

ただし、 $s_{l,\beta}$  は  $s_{l,\beta} = \delta(\xi_l)/(c_\beta \Delta t)$  ( $\beta = L$  または  $T$  であり  $c_L, c_T$  はそれぞれ縦波、横波の波速である) で定義され、 $\hat{U}_{ij}, \hat{T}_{ij}$  はそれぞれ  $U_{ij}, T_{ij}$  のラプラス変換である。また、パラメーター  $\rho$  は  $\rho < 1$  の条件で与えられ、 $\rho^L = \sqrt{\epsilon}$  として決定される。ここで  $\epsilon$  は式(6)、(7)の計算で想定される誤差である。

### 4. 数値解析例

数値解析例として、図1のような三次元無限弾性対中の空洞に対する散乱問題を考える。入射波  $u_i^{in}(\mathbf{x}, t)$ 、及び対応する応力場  $\sigma_{ij}^{in}(\mathbf{x}, t)$  は

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \delta_{i1} \frac{\sigma_0}{\rho c_L^2} (c_L t - x_1 - a) H(c_L t - (x_1 + a)) \quad (8)$$

$$\sigma_{ij}^{in}(\mathbf{x}, t) = -\sigma_0 \{ (1 - 2\kappa) \delta_{ij} + 2\kappa \delta_{i1} \delta_{j1} \} H(c_L t - (x_1 + a)) \quad (9)$$

で与える。ここで、 $a$  は空洞の半径、 $\delta_{ij}$  はクロネッカーデルタ、 $\kappa = c_T^2/c_L^2$  であり、 $\sigma_0$  は応力振幅である。時間ステップ幅は  $\Delta t = c_T t/a = 0.12$  とし、式(6)、(7)における項数  $L$  を  $L = 64$ 、 $\rho = 0.94746353$  とした。空洞を要素数 384 の一定要素で離散化し解析を行った。なお周波数域において、三次元球形空洞による散乱問題の解は、Pao と Mow<sup>3)</sup> により解析解が与えられている。解析解を逆フーリエ変換することにより、時間領域の解を導出することが可能である。図2に、図1のA、B点における変位  $\rho c_T^2 u_1/\sigma_0 a$  の時刻歴応答を示す。入射波面が最初に点Aに到達する時刻を  $c_L t/a = 0.0$  としている。A点に入射波が到達後、A点の変位は増加し始める。入射波が最初にB点に到達する時刻  $c_L t/a = 2.0$  付近でB点の変位もゆっくりと増加し始める。本手法(OQBEM)による解は、PaoとMowの解析解から得られた解とほぼ一致していることが確認できる。

図3は、本手法の要素数に対する必要記憶容量を両対数で表した図である。式(1)の繰込み積は演算子積分法により安定に計算することは可能となるものの、必要記憶容量は通常の境界要素法同様、要素数の増加に伴い膨大になる。超音波 NDT シミュレーションの最終目的は、欠陥からの散乱波を用いて欠陥形状、位置等を特定することにある。特に、検査範囲が広い土木構造物を対象とする場合には、迅速にデータを得ることが必要となることから、記憶容量のみならず、計算時間の低減をも図る必要がある。

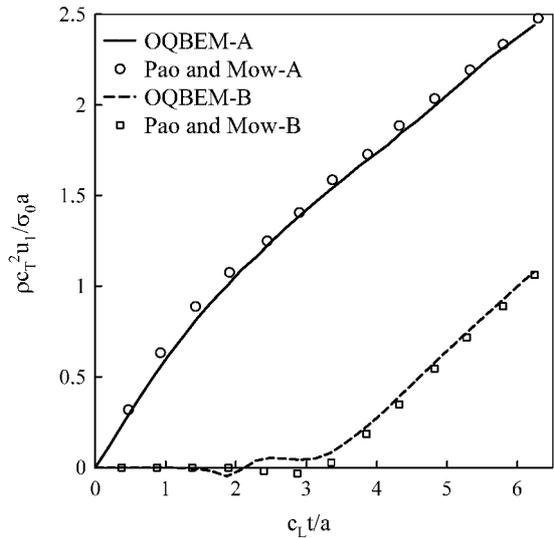


図-2 Pao and Mow による級数解と本手法による精度比較

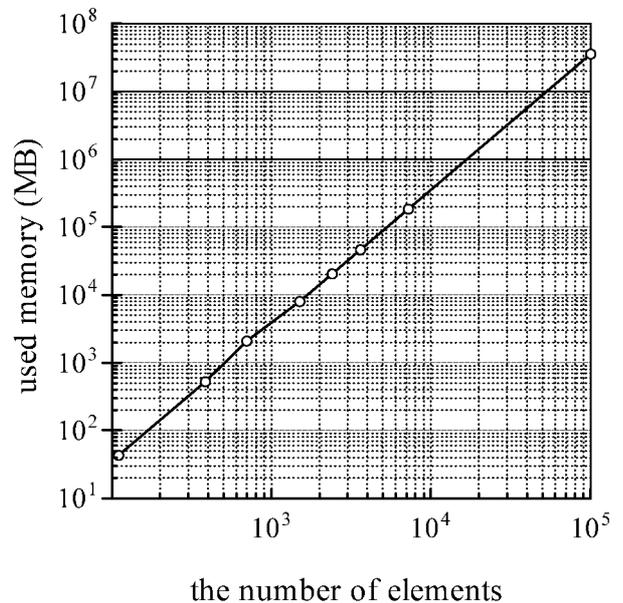


図-3 OQBEM における必要記憶容量

### 5. まとめ

演算子積分法を用いた三次元時間領域動弾性境界要素法を開発した。数値解析例とともに本手法における計算精度、記憶容量を示した。今後は、高速多重極法<sup>4)</sup>を適用し計算時間・記憶容量を低減させることを行うとともに、フェイズドアレイ探傷の三次元解析を行う予定である。

#### 参考文献

- 1) 小林昭一編著: 波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, 2000.
- 2) Lubich, C.: Convolution quadrature and discretized operational calculus I *Numer. Math.*, **52** (1988), pp. 129-145.
- 3) Pao, Y.-H. and Mow, C. C.: Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations, Crane and Russak, New York, 1973.
- 4) Rokhlin, V: Rapid solution of integral equations of classical potential theory, *J. Comput. Phys.*, **60**(1985), pp. 187-207.