

多孔質体中の移流分散係数の変化に関する研究

名古屋大学工学部

学生員○清水陽平

名古屋大学大学院工学研究科 正会員 鷲見哲也

1. はじめに

地下水や河川伏流水での汚染物質や栄養塩物質等の化学的・微生物学的な変化に関する評価法やモデル化が課題となっている中で、輸送プロセスそのものの一部である移流分散の正しい把握はその評価の前提であり重要である。しかし、カラム実験等でもよく見られる分散係数の距離依存性に関する合理的な説明はなされていない。本研究では、Taylor の Lagrange 相関法により一般に扱われる Euler 的理論解の持つ問題を再考し、カラムを使った実験データと比較することにより、移流分散係数の時間的（空間的）挙動を議論する。

2. Taylor の Lagrange 相関法の理論と 1 次元移流分散理論の比較と考察

一様な多孔体材料中を 1 次元的に溶液が流れるカラムを想定する。一定流量の下での 1 次元移流分散方程式と、初期濃度 0, 上流端で時 $t=0$ 以降に濃度 1 の境界条件では、カラム内濃度の分布の解は、式(3)となる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (1) \quad C(x=0, t) = u_s(0), \quad C(x=0, t) = 1 \quad (2)$$

$$C(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erfc} \left(\frac{x-ut}{2\sqrt{Dt}} \right) + e^{\frac{ux}{D}} \operatorname{erfc} \left(\frac{x+ut}{2\sqrt{Dt}} \right) \right\} \quad (3)$$

ここに、 $C(x, t)$ は無次元濃度、 u_0 は一定の平均実流速、 D は分散係数、 $u_s(t)$ は時間のステップ関数、 erfc は補誤差関数である。しかしこの解は、粒子の運動に時間相関がなくランダムであることが前提となる。さて一方で、 $x=0, t=0$ での瞬間面源投入による解は x に対し正規分布となるが、Lagrange 的視点からの拡散係数は確率変数である粒子位置 X の分散値 $\overline{X^2}$ によって式(4)で表され、分散係数が一定とみなせるのは、 $\overline{X^2}$ が時間に比例する場合の式(5)に対応する。

$$D = 1/2 \cdot d\overline{X^2}/dt \quad (4) \quad \overline{X^2} = E[(X - u_0 t)^2] = 2Dt \quad (5)$$

式(4)を変形する¹⁾と、粒子流速 U の時間相関係数 (Lagrange 相関係数) $R_L(\tau)$ を用いて式(6)で表すことができ、時間差 τ に対して、これが寿命時間 t_0 で式(4)の指数関数の様に仮定すると、式(7)に展開される。

$$R_L(\tau) = \frac{\overline{U'(t)U'(t+\tau)}}{\sigma_U^2} \quad (6) \quad D = \sigma_U^2 t_0 [1 - \exp(-\tau/t_0)] = D_\infty [1 - \exp(-\tau/t_0)] \quad (7) \quad D_\infty = \sigma_U^2 t_0 \quad (8)$$

つまり、寿命時間に近い時間スケールでは、分散係数は変化し続けるということ、最終分散係数は流速分散値と寿命時間との積で表されること、がわかる。

多孔体では、流下距離が粒径の何倍かの空間スケールを下る間に、粒子はさまざまな流速を経験し、ランダムな運動をしたとみなすことができるため、寿命時間に対応する流下距離 $x_0 = u_0 t_0$ を定義するとともに、粒子流速の変動係数 α_U を導入することで、最終分散係数は以下のように書き換えることができる。

$$D_\infty = \sigma_U^2 t_0 = \alpha_U^2 u_0 x_0 \quad (9)$$

この式は、「最終分散係数は、流速のばらつきと、流速相関を失う時間(空間)スケールに支配される」ということを合理的に示すものである。流速の変動係数は、1 以下に収まることが期待されるため、相関性を保つ距離 x_0 が粒径や、材料不均一性の空間的広がりとの関係を得ることが期待される。

ところで 1 次元理論解は D を一定と仮定しているから、 D が変化する現象には本来適用できない。しかし式(7)のように振舞うことを仮定すれば、粒子の空間分散が 1 次元理論解と式(5)結びついているから、これへのフィッティングから得る推定値 D_{FIT} の挙動は、式(7)を用いて式(4)を時刻 t まで積分する事で推定できる。

$$D_{FIT} = D_\infty \left[1 - \frac{t_0}{t} \{ 1 - \exp(-t/t_0) \} \right] \quad (10)$$

2 つ以上の投入点に比較的近い断面で 1 次元理論から同定した値があれば、 D_∞ と寿命時間 t_0 が推定できる。

3. 実験装置・実験方法

カラム実験装置の概要を図-1 に示す。カラムの内径は 7.3cm, 長さは 48.2cm であり, 充填する多孔質体は平均粒径 2.1mm の均質砂である。給水は, 回転数によって流量を制御できるローラ・ポンプを用いて行う。流量は, Darcy 流速において 0.115cm/s (Case1) および 0.236cm/s (Case-2) となる 2 ケースを行った, 供給する溶液は, 水道水と濃度 1.0g/L の NaCl 水溶液とを用い, それぞれの給水タンクから, 切り替えコックによってある時刻に給水液を切り替え, 供給濃度をステップ関数として変化させた。物質の濃度変化は, イオン濃度が比電気伝導度に比例することを利用する。上端から 16.4cm, 25.8cm, 35.2cm の 3 断面に 2 本 1 組のステンレス電極を設置し, 電極間の導電率を電気伝導率計により電圧値に変換して, それをデータ・ログを経由して PC で 2 秒毎に記録した。電圧は導電率に比例することから, そのまま, 電圧の最大値 (NaCl 水溶液) と最小値 (水道水) の間で 0~1 の値に変換し, 無次元濃度 $C(x,t)$ とした。

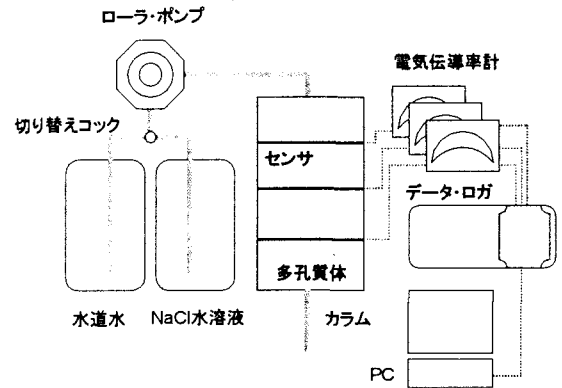


図-1 実験装置

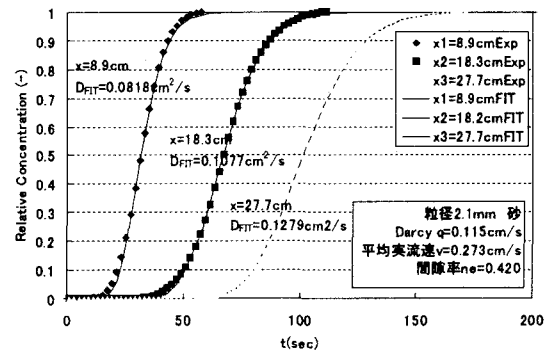


図-2 相対濃度変化と理論曲線 (Case1)

4. 実験結果と考察

図-2 は, Case-1 における, 無次元濃度の時間変化の計測値とフィッティングによる 1 次元理論解との比較を表す。この同定による, 各断面でのみかけの分散係数 D_{FIT} を, 各断面の平均通過時間 $t=x/u_0$ に対応させて図-3 にプロットしたところ, 時間変化していることがわかった。表-1 は, D_{FIT} を式(10)に当てはめて同定した, 最終分散係数 D_∞ , 寿命時間 t_0 および式(9)から得られる流速分散値 σ_U^2 などを示した。さらに図-3 にこれらを式(7)および式(10)に代入して得た瞬間分散係数 D および D_{FIT} の挙動を併記した。分散長 ($\alpha=D_\infty/u_0$) は平均粒径の 2-3 倍, 平均粒径の寿命時間に平均実流速を乗じた, 相関低減を表す距離 $x_0=u_0t$ は表-1 のように, 平均粒径の 9~25 倍となっている。Lagrange 分散による瞬間分散係数の変化は実験カラム長の範囲で終わっていると見られるが, 1 次元理論解での推定値は変化し続けており, 最終分散係数に達していないとみることができる。

5. おわりに

上記の様に式(7)および式(10)を利用し, 最終分散係数と, それに至るまでの分散係数の時間変化が推定できることは, 本手法の大きなメリットであろう。今後は材料の条件や不均一性の情報に基づき, 分散係数変化の起こる時間 (空間) スケールを推定する手法へ発展させていきたい。

6. 参考文献

1. 椿 東一郎: 水理学 II, 森北出版, pp.173-195, 1974.

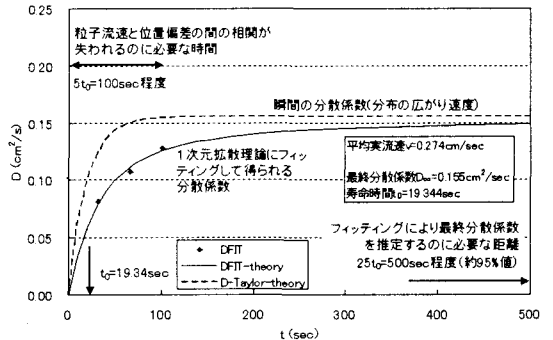


図-3 分散係数の時間的挙動 (Case1)

表-1 推定された諸パラメータ

	Case1	Case2
実流速 u_0 (cm/sec)	0.273	0.473
分散係数 $D_{FIT}(x=8.9\text{cm})(\text{cm}^2/\text{sec})$	0.0818	0.1678
分散係数 $D_{FIT}(x=18.3\text{cm})(\text{cm}^2/\text{sec})$	0.1077	0.1855
分散係数 $D_{FIT}(x=27.7\text{cm})(\text{cm}^2/\text{sec})$	0.1279	0.2005
最終分散係数 $D_\infty(\text{cm}^2/\text{sec})$	0.155	0.212
寿命時間 $t_0(\text{sec})$	19.34	4.073
流速分散値 $\sigma_U^2(\text{cm}^2/\text{sec}^2)$	0.008	0.052
相関距離 $x_0(\text{cm})$	5.3	1.93
流速の変動係数 $\alpha_U=\sigma_U/u_0$	0.33	0.48
相関距離/粒径 (x_0/ds)	25	9
分散長 $\alpha=D_\infty/u_0(\text{cm})$	0.566	0.448
分散長/粒径 (α/ds)	2.7	2.13