

Spline-Ritz 法を用いた扇形 Mindlin 板の高次振動解析

大同工業大学大学院 学生員○渡邊晶子 大同工業大学 正員 水澤富作

1. はじめに 高速運動や物体の衝突を受ける平板には、非常に高次の振動や衝撃音が誘発されるので、高次振動や高次騒音による疲労問題が設計上重要な課題になっている¹⁾。数百 Hz から数千 Hz の高次振動は、高速運動する尾翼やジェットエンジンにより誘発され、また高速回転するハードディスクや超音波加振を受ける平板からも発生するが、比較的低周波域での動的応答と比較して、平板の高次振動については、理論的にさほど解明されていない。汎用性の高い有限要素法を適用しても、構造物に対して非常に小さな波長を伴う高次振動の解明は、計算機の計算時間と容量の制限や数値誤差などの問題により、精度の高い解析結果を得ることが困難な問題とされている²⁾。最近、水澤・渡邊³⁾は spline-Ritz 法を用いた長方形 Mindlin 板の高次振動解析を行っているが、著者らの知る限りでは扇形板の高次振動解析はまだ報告されていない。

本研究では、平板の数百次から数千次の振動数や振動モードを精度よく求めるために、高次振動で重要になる横せん断変形や回転慣性の影響を考慮した 1 次せん断変形理論に基づく spline-Ritz 法⁴⁾を定式化し、扇形板の高次振動解析を行い、本手法の収束性や高次振動特性について検討を行っている。

2. 式の定式化 図-1 に示すように、円周方向に固有関数を Fourier 級数展開し、半径方向に B-spline 関数を仮定した半解析的な spline-Ritz 法⁴⁾を用いて定式化する。横せん断変形と回転慣性の影響を考慮した Mindlin 板理論では、次式に示すような独立したたわみ W と 2 つの回転角 θ_θ, θ_r が未知変位になる。したがって、無次元極座標 ($\xi = \theta/\phi, \eta = (r - R_i)/B$) を用いて表した変位関数は、一方向に固有関数を Fourier 展開し、他の方向に B-spline 関数を仮定すれば、それぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned}\theta_\theta(\xi, \eta) &= \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^{i_R} A_{mn} N_{n,k}(\eta) \cdot \bar{Y}_m(\xi) = \sum_{m=1}^r [N] \bar{Y}_m(\xi) \{\delta_A\}_m \\ \theta_r(\xi, \eta) &= \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^{i_R} B_{mn} N_{n,k}(\eta) \cdot Y_m(\xi) = \sum_{m=1}^r [N] Y_m(\xi) \{\delta_B\}_m \\ W(\xi, \eta) &= \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^{i_R} C_{mn} N_{n,k}(\eta) \cdot Y_m(\xi) = \sum_{m=1}^r [N] Y_m(\xi) \{\delta_C\}_m\end{aligned}\quad (1)$$

ここで、 $[N] = [N_{1,k}(\eta), N_{2,k}(\eta), \dots, N_{i_R,k}(\eta)]$, $\{\delta_A\}_m = \{A_{1m}, A_{2m}, \dots, A_{i_R m}\}^T$, $\{\delta_B\}_m = \{B_{1m}, B_{2m}, \dots, B_{i_R m}\}^T$, $\{\delta_C\}_m = \{C_{1m}, C_{2m}, \dots, C_{i_R m}\}^T$ (2)

である。ただし、 $B = R_0 - R_i$ 、 $i_R = M_r + k - 1$ 、 $\bar{Y}_m(\xi)$ と $Y_m(\xi)$ は与えられた境界条件を満たした固有関数である。

$N_{n,k}(\eta)$ は正規化された B-spline 関数であり、 $k-1$ は spline 次数、 M_r は離散点の数である。また、 r は級数の項数を示す。扇形 Mindlin 板のひずみエネルギー U は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}U &= (D\phi/2) \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \left((1/\phi/\eta) (\partial\theta_\theta/\partial\xi) + (\theta_r/\eta) \right)^2 + \nu (\partial\theta_\theta/\partial\eta)^2 \right. \\ &\quad + 2\nu \left\{ (1/\phi/\eta) (\partial\theta_\theta/\partial\xi) + (\theta_r/\eta) \right\} (\partial\theta_r/\partial\eta) + 0.5(1-\nu^2) \left\{ (\partial\theta_\theta/\partial\eta) + (1/\eta/\phi) (\partial\theta_r/\partial\xi) - (\theta_\theta/\eta) \right\}^2 \\ &\quad \left. + 6(1-\nu)\kappa(B/h)^2 \left\{ (1/\phi/\eta) (\partial W'/\partial\xi) + \theta_\theta \right\}^2 + \left\{ (\partial W'/\partial\eta) + \theta_r \right\}^2 \right\} \cdot A d\xi d\eta\end{aligned}\quad (3)$$

ここで、 D は板の曲げ剛性、 ν と κ は、それぞれポアソン比とせん断修正係数である。また、運動エネルギー T は、次式のように表される。

$$T = (\rho h/2) \omega^2 \phi B^2 \int_0^1 \int_0^1 \left\{ W'^2 + (1/12)(h/B)^2 (\theta_\theta^2 + \theta_r^2) \right\} \cdot A d\xi d\eta\quad (4)$$

ただし、 ρ は密度、 ω は円振動数(rad/sec)である。

Mindlin 板の全ポテンシャルエネルギー Π は、次式で与えられる。 $\Pi = U - T$ (5)

したがって、式(1)を式(5)に代入して、極値化すれば、次式の代数方程式が求められる。

$$\delta\Pi = \delta(U - T) = [K]\{\Delta\} - n^* [M]\{\Delta\} = 0, \{\Delta\}^T = \{\{\delta_A\}_m, \{\delta_B\}_m, \{\delta_C\}_m\} \quad (6)$$

ここで、剛性マトリックス $[K]$ と質量マトリックス $[M]$ の行列の大きさは $3 \times (Mr + k \cdot 2)$ であり、 $n^* = \omega B^2 \sqrt{\rho h/D}$ は振動数パラメータである。なお、2 つの円弧辺の境界条件は、仮想ばね法を用いて導入している。

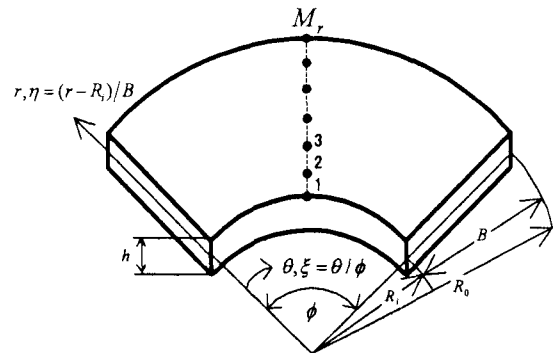


図-1 扇形板と無次元極座標

3. 数値計算例および考察

ここでは、扇形板の高次振動解析における本手法の収束性や高次振動特性について示す。

図-2には、周辺単純支持された扇形 Mindlin 板の振動数パラメータ $n^* = \omega B^2 \sqrt{\rho h / D}$ に与える離散点の数 Mr の影響が示してある。ここで、 $Ro/Ri=2.0$ 、 $b/h=1000$ 、 $\phi=30^\circ$ 、 Mr は 51 から 251 まで変化させ、また、 $k-1=5$ とする。これより、 Mr を 101 程度にとれば 3000 次の振動次数までの値はさほど離散点の数の影響を受けない。また、表-1には、3000 次までの振動数パラメータに与える spline 次数 $k-1$ の影響が示してある。これより、spline 次数を高めると高次の振動数パラメータが一定値への安定した収束状態を示している。本手法の解析精度を比較するために、他の手法と低次の振動数パラメータを比較したところよく一致した結果を得ている。したがって、以下の計算例では、 $Mr=251$ 、 $k-1=5$ を用い、 $\nu=0.3$ と仮定する。

図-3には、2つの半径方向の直線辺が単純支持され、他の2つの円弧辺が自由の3千次モードまでの振動数パラメータに与える中心角の影響が示してある。これより、中心角の影響は振動次数の増大とともに顕著に見られる。また、表-2には、振動数パラメータに与える半径比の影響が示してある。ただし $\phi=30^\circ$ と仮定している。これより、振動次数の増大とともに振動特性に与える半径比の影響が現れている。

まとめ 本手法で得られた結果をまとめると、以下のとおりである。

1) 本手法を用いれば、扇形 Mindlin 板の高次の振動数パラメータとモード形状を求められる。2) spline 次数を高めると、同じ離散点の数であれば、高次の振動モード次数まで収束値が得られる。今後は、本手法を用いて、比較的板厚の大きな扇形 Mindlin 板の高次振動特性について検討を行い、高次振動特性を明らかにしたい。

参考文献 1) Langley, R.S. and Bardell, N.S.: The Aeronautical

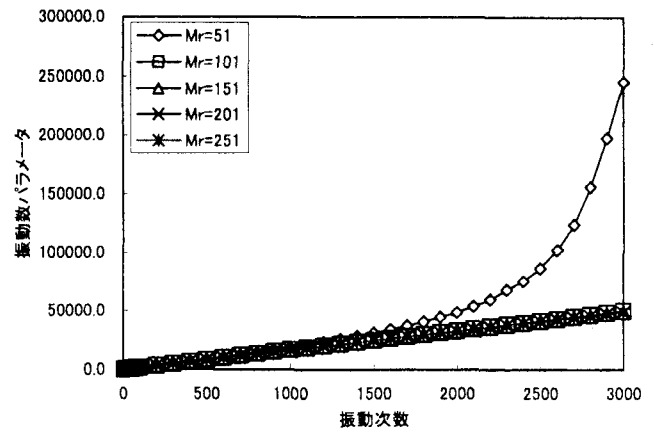


図-2 扇形 Mindlin 板の高次振動数パラメータに与える離散点の数の影響: SS-SS, $\nu=0.3$, $Ro/Ri=2.0$, $b/h=1000$, $\phi=30^\circ$, $k-1=5$

表-1 周辺単純支持された扇形 Mindlin 板の振動数パラメータに与える spline 次数の影響: $\nu=0.3$, $Ro/Ri=2.0$, $Mr=251$, $b/h=1000$, $\phi=30^\circ$

modes	m	n	k-1=3	m	n	k-1=4	m	n	k-1=5	m	n	k-1=6
1	1	1	25.859	1	1	25.859	1	1	25.859	1	1	25.859
10	4	1	220.49	4	1	220.49	4	1	220.49	4	1	220.49
50	4	8	924.49	4	8	924.49	4	8	924.49	4	8	924.49
70	7	6	1269.2	7	6	1269.2	7	6	1269.2	7	6	1269.2
100	9	6	1809.6	9	6	1809.6	9	6	1809.6	9	6	1809.6
200	9	14	3440.5	9	14	3440.5	9	14	3440.5	9	14	3440.5
300	21	2	5099.7	21	2	5099.7	21	2	5099.7	21	2	5099.7
400	17	12	6741.6	17	12	6741.6	17	12	6741.6	17	12	6741.6
500	6	28	8375.2	6	28	8375.1	6	28	8375.1	6	28	8375.1
600	8	30	10022	8	30	10022	8	30	10022	8	30	10022
700	24	13	11664	24	13	11664	24	13	11664	24	13	11664
800	32	5	13242	32	5	13242	32	5	13242	32	5	13242
900	9	37	14935	9	37	14935	9	37	14935	9	37	14935
1000	1	41	16559	1	41	16558	1	41	16558	1	41	16558
1500	28	31	24607	28	31	24607	28	31	24607	28	31	24607
1700	33	27	27834	33	27	27834	33	27	27834	33	27	27834
2000	54	4	32610	54	4	32610	54	4	32610	54	4	32610
2500	37	38	40647	37	38	40646	37	38	40646	37	38	40646
3000	50	25	48577	6	70	48570	6	70	48569	6	70	48569

*(m,n)は θ 方向、 r 方向の半波長の数である

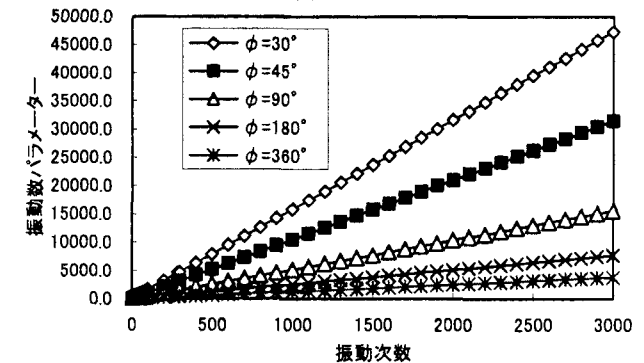


図-3 扇形 Mindlin 板の高次振動数パラメータに与える中心角 ϕ の影響: SS-FF, $\nu=0.3$, $Ro/Ri=2.0$, $b/h=1000$

表-2 扇形 Mindlin 板の高次振動数パラメータとモード次数に与える半径比の影響: SS-FF, $\nu=0.3$, $b/h=1000$, $\phi=30^\circ$

modes	m	n	$Ro/Ri=1.25$	m	n	$Ro/Ri=2.0$	m	n	$Ro/Ri=4.0$	m	n	$Ro/Ri=10.0$
1	1	1	1.6147	1	1	11.765	1	1	26.647	1	1	38.370
10	4	2	37.724	3	2	155.47	1	6	323.91	1	6	482.97
50	7	5	224.66	7	3	784.22	4	7	1460.5	5	5	2091.1
70	10	5	322.47	3	11	1074.4	4	10	2115.4	3	12	2932.6
100	5	8	469.22	5	12	1585.7	7	7	2959.5	4	13	4127.9
200	19	7	989.29	11	10	3144.5	3	24	5809.0	11	7	8122.3
300	30	2	1509.7	11	17	4734.5	14	8	8741.2	1	36	12076
400	28	9	2029.8	13	19	6325.6	10	21	11733	14	12	16037
500	35	6	2534.5	16	18	7893.7	7	33	14489	2	45	19979
600	19	17	3056.8	32	1	9520.0	24	5	17387	10	29	23779
700	17	19	3569.5	27	8	11091	11	32	20135	8	38	27712
800	48	4	4114.5	30	7	12654	19	19	23062	8	42	31701
900	50	5	4624.7	36	3	14257	8	47	25987	6	51	35676
1000	23	22	5138.2	17	34	15828	23	18	28849	19	24	39449
1500	63	8	7760.6	44	6	23736	11	59	43096	39	5	58916
1700	27	29	8808.0	24	42	26914	20	43	48803	36	12	66766
2000	74	8	10382	39	23	31708	1	78	57234	1	91	78235
2500	79	13	13024	28	52	39564	27	46	71447	6	95	97197
3000	37	38	15632	9	70	47380	7	93	85370	27	53	116401

*(m,n)はそれぞれ θ 方向、 r 方向の半波長の数である。

Journal, pp. 287-297, 1998. 2) Zienkiewicz, O.C. IJNME, Vol. 47, pp. 9-28, 2000. 3) 水澤・渡邊: 応用力学論文集 Vol.8, pp105-115, 2005. 4) Mizusawa, T.: Computers & Structures Vol.53, No.5, pp1205-1215, 1994