

Spline 選点法を用いた変厚長方形 Mindlin 板の振動解析

大同工業大学大学院 学生員 ○後藤 大輔 大同工業大学 正員 水澤 富作

1. はじめに 橋梁スラブなどには、変厚を有する平板が用いられており、その振動特性を知ることは設計上重要な課題である。これまでに、変厚を有する長方形薄板の研究に関する報告が見られるが、横せん断変形や回転慣性の影響を考慮した長方形変厚板の強形式に基づく振動解析の研究例は、少ないように思われる。変厚を有する長方形 Mindlin 板の自由振動に関する支配方程式は、独立したたわみと 2 つの回転角を仮定した 3 元連立偏微分方程式で与えられ、強形式の定式化を用いる DQ 法¹⁾、選点法²⁾や差分法などを用いて直接数値的に解くことができる。

本研究では、spline 選点法を定式化し、 y 軸に平行な 2 辺が単純支持され、他の 2 辺が任意の境界条件を持つ一方向に変厚な長方形 Mindlin 板の振動解析への適用について検討を行い、本手法の収束性や精度比較などについて検討を行う。

2. spline 選点法の定式化 3 元連立の線形固有値問題は、微分演算子 L, B を用いて、次式で表される。

$$L(w, \varphi_x, \varphi_y) = \omega^2 q(y) \quad \text{領域} [0 \leq y \leq b], B(w, \varphi_x, \varphi_y) = g(y) \quad \text{境界} [y = 0, y = b] \quad (1)$$

ここで、 w, φ_x, φ_y は、それぞれ独立した変位関数であり、 $q(y)$ は慣性項、 $g(y)$ は与えられた境界条件である。したがって、領域残差 R_L と境界残差 R_B は、それぞれ次式で表される。

$$R_L = L(w, \varphi_x, \varphi_y) - \omega^2 q(y), R_B = B(w, \varphi_x, \varphi_y) - g(y) \quad (2)$$

これらの残差を領域内の選点 (m_y 個) と境界条件の数 (M 個) について求めると、次式で示される。

$$R_L(y_i) = L(w_i, \varphi_{xi}, \varphi_{yi}) - \omega^2 q(y_i); i = 1, 2, \dots, 3m_y, R_B(y_{3m_y+j}) = B(w_{3m_y+j}, \varphi_{x3m_y+j}, \varphi_{y3m_y+j}) - g(y_{3m_y+j}); j = 1, 2, \dots, M \quad (3)$$

独立した 3 つの変位関数 φ_x, φ_y, w は、局所基底で表される B-spline 関数を用いて、次式で仮定する。

$$\varphi_x = \sum_{m=1}^N A_m N_{m,k}(y), \quad \varphi_y = \sum_{m=1}^N B_m N_{m,k}(y), \quad w = \sum_{m=1}^N C_m N_{m,k}(y) \quad ; N = m_y + k - 2 \quad (4)$$

ここで、 $N_{m,k}(y)$ は、正規化された B-spline 関数であり、 m_y と $k-1$ は、それぞれ選点の数と spline 次数である。また、 A_m, B_m, C_m は、それぞれ未定係数である。したがって、残差 $\{R\}$ は重み係数 w_e を用いて次式で表される。

$$\{R\} = \{R_L\} + w_e \{R_B\} \quad (5)$$

式(4)の変位関数を式(5)に代入し、内部領域に設けた選点 m_y と境界点で与えられる境界条件を零とおくと、次式が得られる。

$$\{R\} = \{R_L\} + w_e \{R_B\} = [Z]\{\Delta\} - \omega^2 [M] = 0 \quad (6)$$

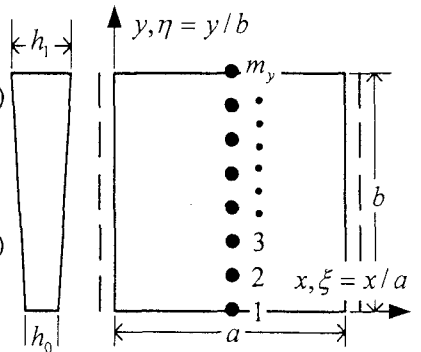
上式の係数マトリックス $[Z]$ は、 $k-1$ を 3 次に仮定すれば、 $3N \times (3m_y + M)$ の正方行列になる。また $[M]$ は質量マトリックスであり、未定係数ベクトルは $\{\Delta\}^T = \{A_1, A_2, \dots, A_{m_y}, B_1, B_2, \dots, B_{m_y}, C_1, C_2, \dots, C_{m_y}\}$ である。

図・1 に示すように、 y 軸方向の 2 つの直線辺が単純支持された変厚を有する長方形 Mindlin 板の自由振動方程式は、次式の 3 元連立偏微分方程式¹⁾で与えられる。無次元極座標系を $(\xi = x/a, \eta = y/b)$ 用いて表せば、

$$\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial \xi^2} + \left(\frac{1-\nu}{2} \right) \left\{ \left(\frac{a}{b} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial \eta^2} + 3\alpha(1+\alpha\eta)^{-1} \left(\frac{a}{b} \right) \frac{\partial \varphi_x}{\partial \eta} + 3\alpha(1+\alpha\eta)^{-1} \left(\frac{a}{b} \right) \frac{\partial \varphi_y}{\partial \xi} \right\} \\ + \left(\frac{1+\nu}{2} \right) \left(\frac{a}{b} \right) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial \xi \partial \eta} - 6\kappa_s(1-\nu)(1+\alpha\eta)^{-2} \left(\frac{h_0}{a} \right)^2 \left\{ \varphi_x + \left(\frac{h_0}{a} \right) \frac{\partial w'}{\partial \xi} \right\} + \frac{\rho h_0 \omega^2 a^4}{D_0} \left(\frac{h_0}{a} \right)^2 \frac{1}{12} \varphi_x = 0 \quad (7-a)$$

$$\left(\frac{a}{b} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial \eta^2} + \left(\frac{1-\nu}{2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial \xi^2} + 3\alpha(1+\alpha\eta)^{-1} \left(\frac{a}{b} \right) \frac{\partial \varphi_y}{\partial \eta} + 3\alpha\nu(1+\alpha\eta)^{-1} \left(\frac{a}{b} \right) \frac{\partial \varphi_x}{\partial \xi} \\ + \left(\frac{1+\nu}{2} \right) \left(\frac{a}{b} \right) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial \xi \partial \eta} - 6\kappa_s(1-\nu)(1+\alpha\eta)^{-2} \left(\frac{a}{h_0} \right)^2 \left\{ \varphi_y + \left(\frac{h_0}{b} \right) \frac{\partial w'}{\partial \eta} \right\} + \frac{\rho h_0 \omega^2 a^4}{D_0} \left(\frac{h_0}{a} \right)^2 \frac{1}{12} \varphi_y = 0 \quad (7-b)$$

$$6\kappa_s(1-\nu) \left(\frac{a}{h_0} \right)^2 \left\{ \left[\frac{\partial^2 w'}{\partial \xi^2} + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \frac{\partial^2 w'}{\partial \eta^2} \right] + \alpha(1+\alpha\eta)^{-1} \left(\frac{a}{b} \right) \frac{\partial w'}{\partial \eta} \right. \\ \left. + \alpha(1+\alpha\eta)^{-1} \left(\frac{h_0}{b} \right) \left(\frac{a}{h_0} \right) \varphi_y + \left(\frac{a}{h_0} \right) \frac{\partial \varphi_x}{\partial \xi} + \left(\frac{a}{h_0} \right) \left(\frac{h_0}{b} \right) \frac{\partial \varphi_y}{\partial \eta} \right\} + \frac{\rho h_0 \omega^2 a^4}{D_0} w' = 0 \quad (7-c)$$



図・1 変厚 Mindlin 板と座標系

となる。ただし、 y 方向に変厚な板の基準曲げ剛度は、 $D_0 = Eh_0^3/12(1-\nu^2)$ であり、また h_0 は基準板厚、 ω は円振動数、 E はヤング係数、 ρ は密度であり、 ν はポアソン比、 κ_s はせん断弾性係数である。ここで、

$h(\eta)$ は $h_0(1+\delta\eta)$ で仮定し, δ は h_1/h_0 である.

y 軸に平行な 2 辺を単純支持と仮定すると, x 軸方向に固有関数を Fourier 級数展開した変位関数は, 次式で表される.

$$\begin{aligned}\varphi_y &= \sum \sum B_{mn} N_{n,k}(\eta) \sin m\pi\xi, \quad \varphi_x = \sum \sum A_{mn} N_{n,k}(\eta) \cos m\pi\xi, \\ w' &= \sum \sum C_{mn} N_{n,k}(\eta) \sin m\pi\xi\end{aligned}\quad (8)$$

したがって, これらの変位関数を式(7-a)から式(7-c)に代入すると, 3 元連立常微分方程式に書き換えられる.

また, x 軸に平行な他の 2 辺の境界条件は, それぞれ(a) 固定辺: $w'=0, \varphi_x=0, \varphi_y=0$, (b) 単純支持辺: $w'=0, \varphi_x=0, M_y=0$, (c) 自由辺: $M_y=0, M_{xy}=0, Q_y=0$ で与えられる. 式(7-a) から式(7-c)と境界条件式で表わされる連立微分方程式は, 先に定式化した spline 選点法を適用すれば, 各選点で内部残差と境界残差をそれぞれ零と置くことにより, 固有方程式である代数方程式に変換できる.

3. 値計算例および考察 計算例として, x 軸に平行な 2 辺が任意の境界条件を持つ変厚 Mindlin 板の振動解析への spline 選点法の適用について示す. ただし, $\nu=0.3, \kappa_s=\pi^2/12, we=10$ に仮定している.

表-1 は, 異なった境界条件を有する変厚正方形 Mindlin 板の振動数パラメータ $n^{*2} = \omega b^2 \sqrt{\rho h_0/D_0}$ の収束性に与える選点の数 m_y の影響が示してある. ここで, 辺長比 a/b を 1, 幅厚比 b/h_0 を 10, 変厚比 δ を 2 とし, m_y を 11 から 301 まで変化をさせて検討を行った. また, 外挿公式⁶⁾を用いて求めた値も示してある. これより, 選点の数を増やすと一定値へ向かったような収束状態が得られる.

表-2 は, 2 つの異なる境界条件を持つ正方形 Mindlin 板の振動数パラメータに与える変厚比の影響が示してある. ここで, a/b を 1, b/h_0 を 10, m_y を 301 とし, δ を 1.25 から 2 で変化をさせている. また, 比較のために三上ら²⁾の選点法の値と spline 帯板法による解³⁾が示してある. これより, 変厚比や境界条件にかかわらず, 他の数値解と良く一致した結果が得られている.

図-2 は, 変厚 Mindlin 板の基本振動数パラメータに与える幅厚比と変厚比の影響が示してある. ここで, x 軸に平行な 2 辺を固定し, b/h_0 を 5 から 10, δ を 1 から 2 まで変化をさせている. これより, 幅厚比が大きくなると振動数パラメータに与える変厚比の影響が大きく現れている.

4. あとがき 得られた結果をまとめると, 次のようになる.

(1) 本手法を用いれば, 数値積分公式を用いずに連立微分方程式を解くことができる. (2) 選点の数を増やすと, 解の様な収束状態が示され, またその収束値は, 他の解析法による数値解と良く一致した結果を示している. (3) 変厚比を増大させると, 振動数パラメータは増大し, 変厚比に大きく依存している.

参考文献 1) 近藤(田仲)他: 応用力学論文集, Vol.3, pp. 193-201, 2000. 2) Mikami, T. and Yoshimura, J.: Comput. Struct., Vol.18, pp. 425-431, 1984. 3) Mizusawa, T.: Comput. Struct., Vol.46, pp. 451-463, 1993. 4) P. Malekzadeh, G. Karami and M. Farid: Comput. Methods Appl. Engrg. 193 (2004) 4781-4796 5) 後藤他: 応用力学論文集, Vol.8, pp. 199-206, 2005. 6) M. G. Salvadori: Transactions of ASCE, No.2441, pp. 590-636, 1951.

表-1 変厚 Mindlin 板の振動数パラメータ n^{*2} の収束性に与える選点の数の影響: $a/b=1, b/h_0=10, \delta=2$

B.C	m_y	Modes				
		1st	2nd	3rd	4th	5th
B-C	11	37.71	66.19	81.57	104.3	111.2
	51	36.18	65.37	75.93	100.3	110.6
	101	36.13	65.34	75.76	100.2	110.6
C-C	151	36.13	65.34	75.73	100.2	110.6
	201	36.12	65.34	75.72	100.2	110.6
	301	36.12	65.33	75.71	100.2	110.6
外挿公式 ⁶⁾		36.12	65.33	75.70	100.2	110.6
F-F	11	13.97	21.82	46.60	47.71	60.27
	51	14.04	22.39	46.95	47.38	61.04
	101	14.04	22.41	46.93	47.41	61.06
F-F	151	14.04	22.42	46.92	47.41	61.07
	201	14.04	22.42	46.92	47.42	61.07
	301	14.04	22.42	46.92	47.42	61.07
外挿公式 ⁶⁾		14.04	22.42	46.92	47.41	61.07

表-2 変厚 Mindlin 板の振動数パラメータ n^{*2} の精度比較: $a/b=1, b/h_0=10, m_y=301, we=10^4$

B.C	δ	Modes				
		1st	2nd	3rd	4th	5th
SSM ⁽³⁾	1.25	29.34	53.77	64.16	85.16	94.03
	1.5	31.79	57.99	68.52	90.80	100.3
	1.75	31.78	57.96	68.50	90.78	100.3
C-C	1.75	34.04	61.83	72.33	95.77	105.8
	2	34.01	61.76	72.32	95.74	105.7
	2	36.12	65.33	75.71	100.2	110.6
SSM ⁽³⁾	1.25	36.07	65.23	75.68	100.2	110.5
	1.5	36.06	65.23	75.69	100.2	110.5
	1.75	10.58	17.17	37.42	39.79	47.50
SSM ⁽³⁾	1.25	10.56	17.18	37.42	39.69	47.55
	1.5	11.73	18.95	40.78	42.58	52.29
	1.75	11.66	18.99	40.79	42.31	52.41
F-F	1.75	12.89	20.71	43.94	45.08	56.85
	2	12.74	20.78	43.96	44.59	57.02
	2	14.04	22.42	46.92	47.42	61.07
CM ⁽²⁾	1.382	22.52	46.71	46.93	61.30	
	SSM ⁽³⁾	13.82	22.53	46.71	46.94	61.29

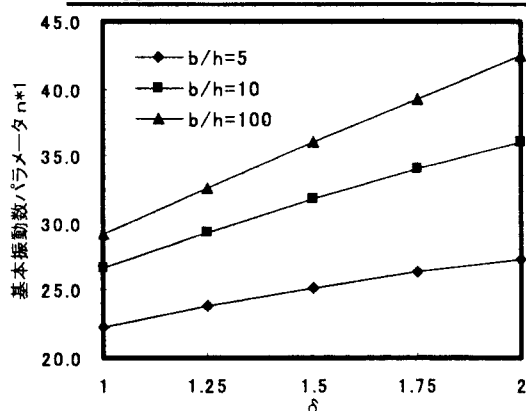


図-2 変厚 Mindlin 板の基本振動パラメータ n^{*1} に与える幅厚比の影響: C-C, $a/b=1, m_y=301, we=10^4$