

高速多重極境界要素法による2次元直交異方性弾性体のクラック解析

福井大学大学院 学生会員 ○ 小林 孝彰
 福井大学大学院 学生会員 王 徳法
 福井大学大学院 正会員 福井 卓雄

1 はじめに

現代我々の身の回りには、直交異方性を有するものが数多く存在している。鉄筋コンクリート構造物では鉄筋量が方向によって異なる場合、鋼床版でもリブ間隔が方向によって異なるだけで直交異方性であるといえる。

本研究は、直交異方性でも2次元の弾性体のクラック解析を扱う。解析手法として、境界要素法に高速多重極を適用することで問題点であった計算・記憶容量の負荷を軽減し、効率化を図ることを目的としている。

2 直交異方性弾性体の2次元理論

基礎式と境界値問題 直交異方性弾性体の2次元静的問題において、ひずみ-変位関係、つり合い方程式、ひずみ-応力関係は以下となる。

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \sigma_{ij,j} + X_i = 0$$

$$\sigma_{ij} = c_{ij}^{kl} \epsilon_{kl}, \quad \begin{pmatrix} c_{11}^{11} & c_{11}^{22} & 0 \\ c_{22}^{11} & c_{22}^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2c_{12}^{12} \end{pmatrix} \quad (1)$$

ここに、 u_i は変位、 ϵ_{ij} はひずみ、 σ_{ij} は応力、 X_i は物体力、 c_{ij}^{kl} は弾性テンソルである。

領域 B および境界 $\partial B = \partial B_1 + \partial B_2$ の物体内部に複数のクラック $S_1, S_2, \dots, S_M$ が含まれている場合、クラックに厚さはないものとする。境界値問題はクラック面上の条件も同時に考慮することになる。

$$c_{ij}^{kl} u_{k,lj} + X_i = 0 \quad (\text{in } B)$$

$$u_i = \hat{u}_i \quad (\text{on } \partial B_1), \quad s_i = \sigma_{ij} n_j = \hat{s}_i \quad (\text{on } \partial B_2) \quad (2)$$

$$s_i = \sigma_{ij} n_j = 0 \quad (\text{on } S_1, S_2, \dots, S_M)$$

ここに s_i は境界応力ベクトルである。

3 境界要素法

境界積分方程式 この問題における解は、Somigliana の公式と (2) により

$$C_{ij} u_j(x) = \hat{u}_i(x) + \int_{\partial B} G_{ij}(x, y) s_j y dS_y$$

$$- \int_{\partial B} S_{ij}(x, y) u_j(y) dS_y - \sum_K \int_{S_K} S_{ij}(x, y) [u_j](y) dS_y$$

で与えられる。

C_{ij} は自由項で、点 x が領域内部にあるとき δ_{ij} 、滑らかな境界上にあるとき $\delta_{ij}/2$ 、領域および境界の外部にあるとき 0 である。また $\hat{u}_i$ は物体力による特解、 $[u_i]$ はクラック開口変位である。クラック表面上に与えた単位法線ベクトル n_i と同じ向きの面上の変位を u_i^+ 、反対向きの面上の変位を u_i^- とするとき、 $[u_i] = u_i^+ - u_i^-$ としている。 G_{ij} 、 S_{ij} はそれぞれ基本解および二重層核である。

クラック先端要素 クラック面の変位はクラック先端付近で $\sqrt{r}$ に比例している [1]。そこでクラック先端の近似基底 $f_I(x)$ として図-1に示すように $\sqrt{r}$ に比例する関数を導入する。

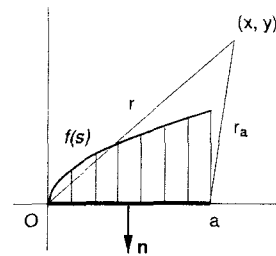


図-1 クラック先端要素

クラック先端要素と他の一定要素とを適合させるために、要素中点の変位が 1 となるように $f_I(x)$ を選ぶと、

$$f_I(x) = \sqrt{2s/a} \quad (3)$$

となる。ここに s はクラック先端からとった長さであり、 a は要素の長さである。

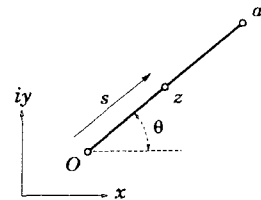


図-2 複素平面上のクラック先端要素

クラック先端要素を複素平面上では図-2 のように考えられるため、 s は

$$s = \frac{z_\alpha}{e^{i\theta} + \gamma_\alpha e^{-i\theta}} = \frac{z_\alpha}{\tau_\alpha}, \quad (4)$$

となる。また線素 ds は

$$ds = \frac{dz_\alpha}{e^{i\theta} + \gamma_\alpha e^{-i\theta}} = \frac{dz_\alpha}{\tau_\alpha} \quad (5)$$

となり、(3) は以下ようになる。

$$f_I(x) = \sqrt{2s/a} = \sqrt{\frac{2z_\alpha}{a\tau_\alpha}} \quad (6)$$

ここで $\tau_\alpha = e^{i\theta} + \gamma_\alpha e^{-i\theta}$ である。

4 高速多重極法

クラック先端要素の多重極展開 多数のクラックの解析を行うには、大容量の計算を効率よく行うことが必要となる。このため高速多重極法 [2] を利用し効率化を図ることが重要になってくる。ここでは高速多重極法を使用するために必要な多重極展開をクラック先端要素について行う。

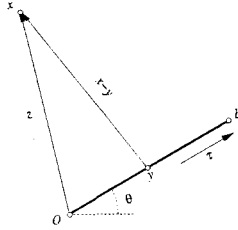


図-3 クラック先端要素と多重極点

図-3のクラック先端要素 $E = [0, b]$ を考える。計算が容易になるようにクラック先端 O に多重極点をおく。 $\sqrt{2s/a} = \sqrt{2\zeta_\alpha/b_\alpha}$ とおけるので、クラック先端要素の多重極モーメント $\tilde{M}$ は

$$\begin{aligned}\tilde{M}_n^S &= \int_E M_n^S(\zeta_1) \sqrt{2s/a} ds_y \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\tau_1 \sqrt{b_1}} \int_0^{b_1} M_n^S(\zeta_1) \sqrt{\zeta_1} d\zeta_1\end{aligned}\quad (7)$$

により計算できる。 M^S は [2] に示されるように二重層核の多重極モーメントである。クラック先端要素の二重層核の多重極モーメントは

$$\begin{aligned}\tilde{M}_{-1}^S &= 0, \quad \tilde{M}_0^S = \frac{-2\sqrt{2}V}{3\tau_1} b_1 \\ \tilde{M}_n^S &= \frac{-\sqrt{2}V}{n(n + \frac{3}{2})\tau_1} b_1^{n+1}\end{aligned}\quad (8)$$

$$\begin{aligned}\tilde{N}_{-1}^S &= 0, \quad \tilde{N}_0^S = \frac{-2\sqrt{2}W}{3\tau_2} b_2 \\ \tilde{N}_n^S &= \frac{-\sqrt{2}W}{n(n + \frac{3}{2})\tau_2} b_2^{n+1}\end{aligned}\quad (9)$$

となる。係数 V, W とクラック先端以外の要素においては [2] より求まる。

5 計算時間と記憶容量の検証

高速多重極法の効果を確認するために、傾き 45° で1個のクラック問題、 3×3 個のクラック問題図-4を解析し、反復1回あたりの計算時間と必要記憶容量を計測した。どちらの場合も長さの半分の1としている。

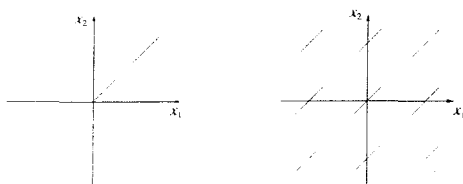


図-4 無限領域内におけるクラック

弾性係数は以下のようにとっている。

$$E_1 = E, E_2/E_1 = 2, \nu_{12} = 0.25, G_{12}/E_1 = 0.4$$

これにより得られた計算時間を図-5、記憶容量を図-6に示す。ここでは、多重極展開は M_{25}, N_{25} までを取り、2近傍を近傍としている。また、最小セルに含まれる要素数の最大値は8である。

反復1回あたりの計算時間は図-5を見て、取り扱う問題によって多少異なるものの、ほぼ要素数に比例していることがわかる。また使用記憶容量においても図-6から見て、要素数が1000以上の場合には、ほぼ比例していることがわかる。

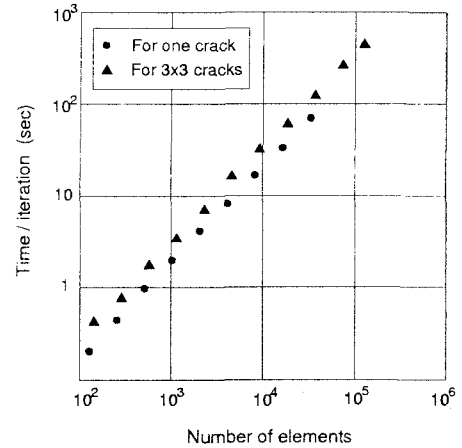


図-5 反復1回あたりの計算時間

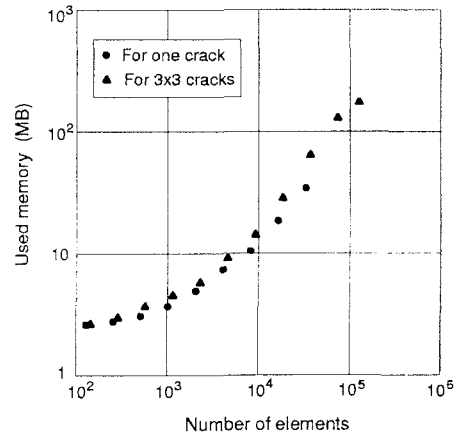


図-6 計算に必要とした総記憶容量

6 おわりに

本研究では2次元直行異方性の静弾性問題として、厚みのないクラック問題を考えた。クラックの先端要素においては複素関数の表現を用いることで高速多重極アルゴリズムの導入を容易にした。高速多重極法を用いることで、計算時間・記憶容量が要素数 N に対してともに $O(N)$ となったことから、境界要素法への適用が有効であることがいえる、多数クラック解析時に非常に有効な手法であることがいえる。

参考文献

- [1] Liebowitz, H.: Fracture, Academic Press, Vol.II, London, pp123-126, 1968.
- [2] 福井卓雄, 王徳法, 小林孝彰: 直交異方性静弾性問題の高速多重極境界要素法による解析, 境界要素法論文集, 21, pp. 85-90, (2004).