確率的サンプリング法を用いた任意の交差曲面境界の要素分割

福井大学工学部　学生会員　○　中山 雅史
福井大学大学院　学生会員　　今度　薫
福井大学大学院　正会員　　福井 卓雄

著者らは, 大規模問題の境界要素法解析のために, 3 次元曲面上の要素を効率的に生成する手法について研究を進めてきた [1]。手法の背景となった手段は, 田中ら [2] によって提案された, 曲面のサンプリング点を高速に生成する確率的サンプリング法である。本研究は、同じく田中ら [3] によって提案されている確率的サンプリング法を用いた交差曲面の境界を決定する手法を用いて、交差曲面を含む境界の要素分割を自動化することを目的としている。この手法は解析対象を CSG で表現したソリッドモデルで扱う場合に有力な要素生成手法となると期待される。

1　確率微分方程式による曲面上の点のサンプリング

1.1　確率微分方程式

3 次元空間の曲面 S が陰関数表示

$$F(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{1}$$

で与えられているとする。この曲面上にできるだけ均等に点をサンプリングして, その点の集合を利用して境界要素を生成することが現在の目標である。

田中ら [2] は, 陰関数表示された曲面上の点をサンプリングする手法として, サンプリング点の変位量 dx_i を確率過程と見て, 変移確率微分方程式

$$dx_i(t) = dx_i^T(t) + dx_i^S(t) + dx_i^N(t) \tag{2}$$

を解くことにより一連の点列を決定する方法を提案している。まず, この確率微分方程式の意味について述べよう。以下の記述においては, 空間ベクトル（テンソル）の指標に対しては総和規約を適用する。

右辺の第 1 項は接平面項

$$dx_i^T(t) = P_{ij}(\boldsymbol{x}(t))dw_j(t) \tag{3}$$

である。ここに, P_{ij} は, $\nabla F(\boldsymbol{x}(t))$ を F の勾配として,

$$P_{ij}(\boldsymbol{x}(t)) = \delta_{ij} - \frac{1}{|\nabla F(\boldsymbol{x}(t))|^2}\frac{\partial F(\boldsymbol{x}(t))}{\partial x_i}\frac{\partial F(\boldsymbol{x}(t))}{\partial x_j} \tag{4}$$

であり, dw_i は正規乱数ベクトルで, 条件

$$\langle dw_i(t)\rangle = 0, \qquad \langle dw_i(t)\,dw_j(t)\rangle = 2D\delta_{ij}\,dt \tag{5}$$

を満足する。D は分散定数であり, 確率密度 $p_{dw}(\boldsymbol{x})$ は

$$p_{dw}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\prod_{i=1}^{3}d\xi_i = \prod_{i=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{2\pi(2D\Delta t)}}\exp\left[-\frac{\xi_i^2}{2(2D\Delta t)}\right]d\xi_i \tag{6}$$

である。

右辺第 2 項は, 第 1 項で正規乱数を使うことに対する伊藤積分の意味の補正項であって,

$$dx_i^S(t) = -\frac{D}{|\nabla F(\boldsymbol{x}(t))|^2}\frac{\partial F(\boldsymbol{x}(t))}{\partial x_i(t)}\frac{\partial^2 F(\boldsymbol{x}(t))}{\partial x_j \partial x_k}P_{kj}(\boldsymbol{x}(t)) \tag{7}$$

となる。

最後に, 右辺第 3 項は垂直項であって,

$$dx_i^N(t) = -KD\frac{\partial F(\boldsymbol{x}(t))}{\partial x_i(t)}\frac{F(\boldsymbol{x}(t))}{|\nabla F(\boldsymbol{x}(t))|^2} \tag{8}$$

となる。ここに, K は制御パラメータである。この項は, サンプル点を曲面近くに拘束する働きをする。

1.2 計算法

サンプル点の計算の手順は次のようになる。

1. 初期条件として, $\boldsymbol{x}(0)$ を与える。ただし, $|\nabla F(\boldsymbol{x}(0))| \neq 0$ となるようにする。
2. 各ステップごとに, 曲面のパラメータおよび $d\boldsymbol{w}$ を計算し, (2) により増分 $d\boldsymbol{x}$ を計算して, 新しい点 $\boldsymbol{x}$ の近似値を得る。
3. Newton 法により $\boldsymbol{x}$ を垂直線に沿って曲面上に移動させる。
4. 2, 3 を必要なだけ繰り返す。

2 確率的サンプリング法による交差曲線の決定

二つの曲面

$$F_A(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad F_B(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{9}$$

の交差曲線を決定するアルゴリズムについて考える。まず、曲面 A 上のサンプリング点 $\boldsymbol{x}_A$ を上記の方法により求め、それを、曲面 B の内側と外側とに分類する。すなわち、

$$\mathrm{sgn}\{F_B(\boldsymbol{x_A})\} \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } F_B(\boldsymbol{x_A}) > \epsilon \\ -1 & \text{if } F_B(\boldsymbol{x_A}) < -\epsilon \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{10}$$

により、曲面 A 上のサンプリング点 $\boldsymbol{x}_A$ を符号化する。曲面の交差曲線上の点を決定する手順は次のようになる。

1. 曲面 A 上のサンプリング点を確率的サンプリング法により求め、すべてのサンプリング点 $\boldsymbol{x}_A(t)$ について $\mathrm{sgn}\{F_B(\boldsymbol{x_A}(\boldsymbol{t}))\}$ を定める。
2. 異なるステップにおけるサンプリング点の組 $\{\boldsymbol{x}_A(t_1), \boldsymbol{x}_A(t_2)\}$ について

$$\mathrm{sgn}\{F_B(\boldsymbol{x_A}(t_1))\}\mathrm{sgn}\{F_B(\boldsymbol{x_A}(t_2))\} = -1 \tag{11}$$

   が起きたとき、一時停止して、交差曲線上の点を Newton 法により決定する。
3. もし、十分に長い時間 $t_{\max}$ にわたり (11) が起きない場合には、計算を止める。この場合には、曲面同士が交差しないと判断する。

3 境界要素の生成

交差曲線上のサンプリング点が定まれば、バブル法により適切な位置調整を行って、交差曲線上の節点を決定することができる。上記の計算過程において、曲面上のサンプリング点を同時に計算することができるので、境界要素生成に用いるサンプリング点は同じ計算過程の中で収集することが可能である。境界要素の生成は文献 [1] にのべた方法により行う。

詳細な計算結果については発表会当日に報告する。

参考文献

[1] 上田 哲也、浦 勝一、福井 卓雄：大規模境界要素解析のための境界要素自動生成法, 計算工学講演会論文集、**9**、pp. 801-804, 2004

[2] Tanaka, S, A. Morisaki, S. Nakata, Y. Fukuda, and H. Yamamoto : Sampling inplicit surfaces base on stochastic differential equations with converting constraint, *Computers & Graphics*, **24**, pp. 419–431, 2000.

[3] Tanaka, S, Y. Fukuda, and H. Yamamoto : Stochastic algorithm for detecting intersection of implicit surfaces, *Computers & Graphics*, **24**, pp. 523–528, 2000.