演算子積分法を利用した高速多重極境界要素法による２次元弾性波動問題の解析

福井大学工学部　　○　石田 貴之
福井大学大学院　正会員　福井 卓雄

1　はじめに

本論文では, 2 次元弾性波動問題における, 演算子積分法 [1] を用いた時間域境界要素法への高速多重極法の適用を目的とする。

演算子積分法を用いると, 時間域問題で課題とされている解の安定性を向上させることができる。さらに, 高速多重極法を適用することで, 計算の高速化が可能となる。スカラー波動問題については, 著者らもその有効性を確認してきた [2]。また, 周波数領域における弾性問題への, 高速多重極法の適用についてもすでに検討してきた [3]。

本論文では, 時間域における 2 次元弾性波動問題への, 演算子積分法, 高速多重極法の適用を試みる。

2　演算子積分法を利用した時間域境界要素法

2.1　弾性波動問題における境界積分方程式

等方等質な弾性体を仮定すると, 変位 u_i は Navier の方程式を満足し, 境界値問題は

$$c_T^2 u_{i,jj} + (c_L^2 - c_T^2) u_{j,ji} + X_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \ \text{ in } B$$

$$u_i = \hat{u}_i \ \text{ on } \partial B_1, \ \ n_j \sigma_{ji} = T_{ij}^n u_j = \hat{s}_i \ \text{ on } \partial B_2 \qquad (1)$$

と書ける。ここに, X_i は物体力, c_L, c_T は縦波および横波の位相速度である。

今, 物体力がない場合を考えると, 境界値問題 (1) の解 u_i は,

$$C_{ij}(x) u_j(\boldsymbol{x}, t) = \tilde{u}_i(\boldsymbol{x}, t) + \int_{\partial B} G_{ij}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}, t) * T_{jk}^n u_k(\boldsymbol{y}, t)\, dS_y$$

$$- \int_{\partial B} S_{ij}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}, t) * u_j(\boldsymbol{y}, t)\, dS_y \qquad (2)$$

と表すことができる。ここに, C_{ij} は自由項で, G_{ij}, S_{ij} は基本特異解及び第二基本特異解であり, $\tilde{u}_i$ は入射波である。

2.2　演算子積分法を利用した境界積分方程式

演算子積分法を利用するために, 空間領域の近似基底 ϕ_I を導入し, 演算子積分法による近似表現を用いることで

$$C_{ij}(\boldsymbol{x}) \sum_{I=1}^{N} \phi_I(\boldsymbol{x}) u_{j,I}(n\Delta t) = \tilde{u}_i(\boldsymbol{x}, t)$$

$$+ \sum_{I=1}^{N} \sum_{k=0}^{n-1} [A_{ij,I}^{n-k}(\boldsymbol{x}) s_{j,I}(k\Delta t) - B_{ij,I}^{n-k}(\boldsymbol{x}) u_{j,I}(k\Delta t)] \qquad (3)$$

となる。ここに, 影響関数 $A_{ij,I}^m$, $B_{ij,I}^m$ は

$$A_{ij,I}^m(\boldsymbol{x}) = \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_{\partial B} \hat{G}_{ij}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}, s_l) \phi_I(\boldsymbol{y}) e^{-2\pi i m l / L} dS_y \qquad (4)$$

$$B_{ij,I}^m(\boldsymbol{x}) = \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_{\partial B} \hat{S}_{ij}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}, s_l) \phi_I(\boldsymbol{y}) e^{-2\pi i m l / L} dS_y \qquad (5)$$

となる。ここに, $s_l = \delta(\zeta_l)$ である。また ρ は, 誤差を ϵ として, $\rho^L = \sqrt{\epsilon}$ の関係を条件として決定する。$\hat{G}$, $\hat{S}$ はそれぞれ G, S の Laplace 変換で, 次のように与えられる。

$$\hat{G}_{ij}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}, s) = \frac{1}{2\pi\mu} \Big\{ K_0(s_T |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|) \delta_{ij}$$

$$+ \frac{1}{s_T^2} [K_0(s_T |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|) - K_0(s_L |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|)]_{,ij} \Big\} \qquad (6)$$

$$\hat{S}_{ij}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}, s) = T_{jk}^n \hat{G}_{ki}(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{x}, s) \qquad (7)$$

ここに, $s_L = s / c_L \Delta t$, $s_T = s / c_T \Delta t$ とする。また, K_n は第 2 種変形 Bessel 関数である。

3　高速多重極境界要素法

3.1　高速多重極法

高速多重極法は, N 個の点による相互作用を O(N) の計算量で実行することができる。近似境界積分方程式 (3) の右辺の積分 $\sum_{I=1}^{N} A_{ij,I}^m(\boldsymbol{x}_j) s_{j,I}(k\Delta t)$ にこの方法を用いると, 効率よく計算することができる。そのためには, 動弾性の場における多重極展開の表現, 変換の関係が必要となる。

3.2　Galerkin ベクトル

3.2.1　弾性波動場の Galerkin ベクトル表現

基本特異解 (6), 第二基本特異解 (7) によって表現される場を直接多重極展開することは一般に困難とされている。そこで, 弾性波動場を Galerkin ベクトルにより表現することを考える [4]。これにより, 弾性波の伝播の様子を明確にとらえることもできる。これ以後の多重極展開, 局所展開, それらの変換も Galerkin ベクトルを用いて行う。

縦波, 横波についての波動作用素を

$$\Box_L = \nabla^2 - s_L^2, \quad \Box_T = \nabla^2 - s_T^2 \qquad (8)$$

と定義する。Galerkin ベクトル F_i は X_i に対し方程式

$$\Box_L \Box_T F_i = -\frac{1}{1-\nu} X_i \qquad (9)$$

を満足する。

3.2.2　基本特異解の Galerkin ベクトル表現

基本特異解 (6) に対応する Galerkin ベクトルを F_i^G とすると,

$$\Box_L \Box_T F_i^G(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}, s) = -\frac{1}{1-\nu} X_i \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \qquad (10)$$

の解で表され,

$$F_i^G(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}, s) = f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}, s) X_i \qquad (11)$$

となる。ここに,

$$f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y},s) = -\frac{2}{s_T^2}\left[\frac{1}{2\pi}K_0\left(s_T r\right) - \frac{1}{2\pi}K_0\left(s_L r\right)\right] \quad (12)$$

であり, $r=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ とおいた。ここで与えられた $F_i^G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y},s)$ を用いると変位 $u_i(\boldsymbol{x}) = G_{ij}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y},s)X_j$ が得られる。

また, 第二基本特異解 (7) に対応する Galerkin ベクトルを F_i^S とすると, 上の $f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y},s)$ を用いれば,

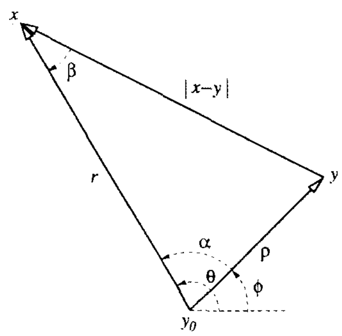
$$F_i^S(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y},s) = f_{,j}\left\{\lambda\sigma_{ij}n_kU_k + \mu\left(n_iU_j + n_jU_i\right)\right\} \quad (13)$$

と書ける。ここに, 変位の食い違い量を U_i, 境界上の外向き単位法線ベクトルを n_i とおいた。変位は $u_i(\boldsymbol{x}) = S_{ij}(x;\boldsymbol{y},s)U_j$ と書ける。

3.3 多重極展開と係数変換

3.3.1 多重極展開

図 1 に示すように, 2 点$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$に対し, 点$\boldsymbol{y}$ の近くに源点$\boldsymbol{y}_0$をとり, $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_0$ および$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_0$の極座標表現をそれぞれ (r,θ), (ρ,ϕ) とする。ここで, 基本特異解 (6), 第二基本特異解 (7) の展開を考える。Galerkin ベクトル $\boldsymbol{F}^G$, $\boldsymbol{F}^S$ は関数 f $(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y},s)$ で表されている。(12) より, f は縦波と横波に対応する二つの波動場の和であることが分かる。それを考慮して, 基本特異解 (11) を Graf の定理で展開すると



図–1 多重極展開における極座標系

$$\boldsymbol{F}^G(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\boldsymbol{M}_n^T K_n\left(s_T r\right)e^{in\theta} - \boldsymbol{M}_n^L K_n\left(s_L r\right)e^{in\theta}\right] \quad (14)$$

となり, これを Galerkin ベクトル $\boldsymbol{F}^G$ の多重極展開を呼ぶ。ここに, $\boldsymbol{M}_n^L, \boldsymbol{M}_n^T$ は多重極モーメントであり, 第 1 種変形 Bessel 関数 I_n を用い,

$$g_n^K(\rho,\phi) = \frac{2}{s_T^2}I_n(s_K\rho)e^{-in\phi} \quad (K=L,T) \quad (15)$$

とすると

$$\boldsymbol{M}_n^L = -\boldsymbol{X}g_n^L(\rho,\phi), \qquad \boldsymbol{M}_n^T = -\boldsymbol{X}g_n^T(\rho,\phi) \quad (16)$$

と表せる。ここから分かるように, 多重極モーメント $\boldsymbol{M}_n^L, \boldsymbol{M}_n^T$ は多重極点 y_0 に依存し, 点 x には影響されない。

また, 第二基本特異解に対する多重極モーメントは

$$\begin{bmatrix} M_{\rho n}^K \\ M_{\phi n}^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{ij}(\rho,\phi) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_{\rho n}^K \\ g_{\phi n}^K \end{bmatrix} \quad (17)$$

と書ける。ここに $V_{ij}(\rho,\phi)$ は $[\lambda\sigma ijn_kU_k + \mu(n_iU_j + n_jU_i)]$ の極座標成分であり, $g_{\rho n}^K$, $g_{\phi n}^K$ は $g_n^K(\rho,\phi)$ の偏導関数

$$g_{\rho n}^K = \frac{\partial g_n^K}{\partial\rho} = \frac{2s_K}{s_T^2}\left[n\frac{I_n(s_K\rho)}{s_K\rho} - I_{n+1}(s_K\rho)\right]e^{-in\phi}$$

$$g_{\phi n}^K = \frac{1}{\rho}\frac{\partial g_n^K}{\partial\phi} = -\frac{2ins_K}{s_T^2}\frac{I_n(s_K\rho)}{s_K\rho}e^{-in\phi} \quad (18)$$

である。

3.3.2 展開係数の変換

波動場 $F^G(\boldsymbol{x})$ を点 x_0 まわりの局所展開

$$\boldsymbol{F}^G(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\boldsymbol{L}_n^T I_n\left(s_T r\right)e^{-in\phi} - \boldsymbol{L}_n^L I_n\left(s_L r\right)e^{-in\phi}\right] \quad (19)$$

で表すことにする。

ここで, 多重極点の移動, 局所展開への変換, 局所展開点の移動による係数変換の関係は

$$\tilde{M}_n^K = \sum_{m=-\infty}^{\infty} M_m^K I_{n-m}\left(s_K\rho\right)e^{-i(n-m)\phi} \quad (20)$$

$$L_n^K = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m M_m^K K_{n+m}\left(s_K r\right)e^{i(n+m)\theta} \quad (21)$$

$$\tilde{L}_n^K = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-m} L_m^K I_{n-m}\left(s_K\rho\right)e^{i(n-m)\phi} \quad (22)$$

となる。

3.4 高速多重極アルゴリズム

高速多重極法は, 階層構造を導入することで, 多くの要素からの影響をそれと等価な多重極で置き換え, 計算を高速化する方法である。

ここでは, 4 分木構造を考える。つまり, 波源全体を含む正方形領域を根セルとして, これを 4 等分して子セルとする。これを繰り返すことで 4 分木構造を構成する。この中で, (20), (21), (22) などを用い係数を決定していくことで, 多くの影響を一括して計算することができる。

3.5 おわりに

2 次元弾性波動問題において, 演算子積分法を利用した境界要素法に, 高速多重極法を適用することができた。解析結果は, 当日報告する。

参考文献

[1] C. Lubich : Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Numer. Math.*, **52**, pp. 129–145, 1988.

[2] 福井卓雄, 岡山美央: 演算子積分法を用いた時間領域境界要素法における高速多重極法の適用, 計算工学講演会論文集, **10** pp. 587-590, 2005.

[3] 福井卓雄, 井上耕一: 高速多重極境界要素法による 2 次元動弾性問題の解析, 応用力学論文集. **1** pp. 373-380, 1998.

[4] ファン, Y.C.（大橋義夫・村上澄男・神谷紀生　共訳）：固体の力学/理論, 培風館, 1970.