

弾塑性複合材料が示す巨視的挙動の数値解析

信州大学 打矢 大介
信州大学 正員 小山 茂
信州大学 正員 大上 俊之

1. はじめに

土木構造材は多くが複合材料であり、内部に亀裂・介在物等の微視構造を有している。土木分野で第一に必要な情報は材料の巨視的挙動であるが、それは微視構造が示す挙動の平均として現れるため、全体に対するスケールが小さくても無視できない。複合材料の巨視的挙動を微視的な観点から予測する方法に等価介在物法²⁾と森-田中の方法³⁾があるが、本研究ではそれらを拡張し、母材と介在物の区別が明確に付かない弾塑性複合材料対しても適用可能な平均剛性を求める手法を提案する。

2. 解析対象とモデル化

解析対象を図-1 左に示すような、全体に占める体積比率が f_1 の材料1と f_2 の材料2の二種類の弾塑性体で構成される複合材料とする。上は母材と介在物からなる複合材、下は母材と介在物の区別が明確にはつきにくいような複合材の例である。

これらをモデル化するにあたり、架空の等方弾性材料を導入する。すなわち、架空の材料を母材、現実の二種類の材料を介在物とする三種類の材料で構成される複合材料に置き換える(図-1 右)。こうした材料では、現実の材料が母材または介在物という区別をせずに同格に扱われるため、例えば二種類の材料の体積比率が同程度である場合、多結晶体のようにそもそも母材が存在しない複合材料の一モデルとして考えてよい。また、このモデルを対象とした定式化の最後に $f_1 + f_2 = 1$ とおくことによって現実の複合材料を表現するものとする。

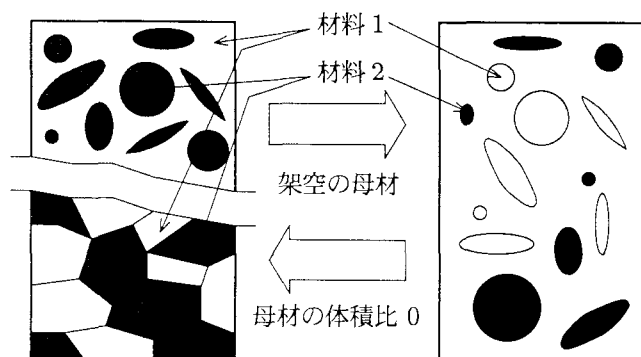


図-1 解析対象のモデル化

3. 定式化

(1) 等価介在物法と森-田中の理論

ここでは、母材に関する諸量には下添え字 M を、介在物に関する諸量には下添え字 $Ii(i = 1, 2)$ を付けて表記する。母材および介在物の弾性定数テンソルをそれぞれ C_M, C_{Ii} とする。森-田中の理論³⁾によると、母材と介在物における応力増分とひずみ増分との関係は

$$\dot{\sigma}_M = C_M \dot{\epsilon}_D, \quad \dot{\sigma}_{Ii} = C_{Ii}(\dot{\epsilon}_{Ii} - \dot{\epsilon}_{Ii}^p) \quad (1)$$

と表せる。ここに $\dot{\sigma}_M, \dot{\epsilon}_D$ は母材の応力増分・ひずみ増分の体積平均を、 $\dot{\sigma}_{Ii}, \dot{\epsilon}_{Ii}$ はそれぞれ介在物の応力増分・ひずみ増分の体積平均を表す。 $\dot{\epsilon}_{Ii}^p$ は介在物の塑性ひずみ増分の体積平均である。ここで母材のひずみ増分の体積平均を $\dot{\epsilon}_M$ と表記しないのは、 $\dot{\epsilon}_D$ が母材における単なる体積平均ではなく、介在物が多数含まれることによる乱れを考慮しているためである。つまり、 $\dot{\epsilon}_D$ には介在物同士の相互作用が含まれることに注意する。

介在物のひずみ増分は、母材のひずみ増分に母材と介在物の相互作用による乱れ $\dot{\gamma}_{Ii}$ が付加されたものとし、

$$\dot{\epsilon}_{Ii} = \dot{\epsilon}_D + \dot{\gamma}_{Ii} \quad (2)$$

と表す。母材が等方弾性体で介在物の形状が回転楕円体ならば、この乱れ成分は介在物内部で一定であるということが Eshelby によって示されている¹⁾。

ここで、等価介在物法²⁾を適用すると

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{Ii} &= C_{Ii}(\dot{\epsilon}_D + \dot{\gamma}_{Ii} - \dot{\epsilon}_{Ii}^p) \\ &= C_M\{\dot{\epsilon}_D + \dot{\gamma}_{Ii} - (\dot{\epsilon}_{Ii}^p + \dot{\epsilon}_i^*)\} \end{aligned} \quad (3)$$

と書ける。ここに $\dot{\epsilon}_i$ は、eigen ひずみと呼ばれる非適合ひずみであり、上の等式を成立させるために導入した量でもある。一方、ひずみの乱れ成分と eigen ひずみとの間には以下の関係がある。

$$\dot{\gamma}_{Ii} = S_i(\dot{\epsilon}_{Ii}^p + \dot{\epsilon}_i^*) \quad (4)$$

ここに S_i は Eshelby のテンソルで、等方弾性体に回転楕円体介在物が存在する場合、介在物の形状と母材のポアソン比のみから決まる定数パラメータとなる¹⁾。

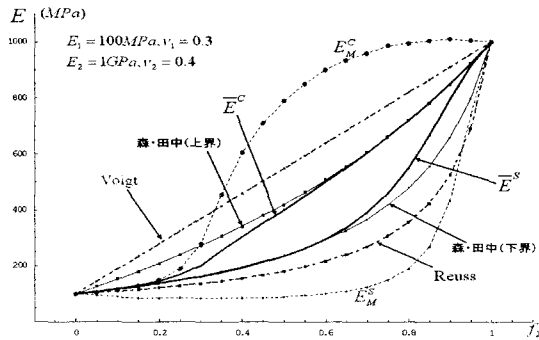


図-2 巨視的ヤング率の評価

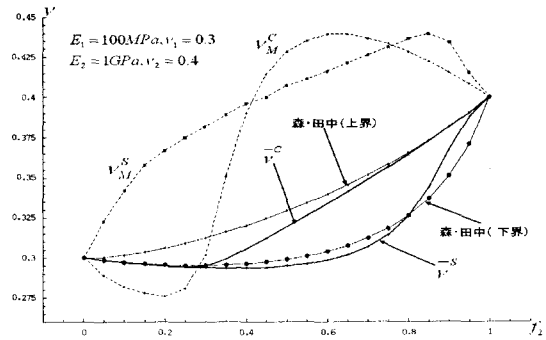


図-3 巨視的ポアソン比の評価

(2) 弾塑性材料の構成則

介在物は von Mises の降伏条件に従うものとして、

$$f_i \equiv \sqrt{(J_2)_i} - F_i(\epsilon_{1i}^p) \quad (5)$$

で降伏関数を定義する。ここに $\sqrt{(J_2)_i}$ は相当応力、 ϵ_{1i}^p は平均塑性ひずみである。硬化関数はべき乗の等方硬化則に従うものとして、

$$F_i(\epsilon_{1i}^p) = \frac{1}{\sqrt{3}} \{ \sigma_{1i}^Y + h_i (\epsilon_{1i}^{eq})^{n_i} \} \quad (6)$$

と仮定する。ここに σ_{1i}^Y は介在物の単純引っ張り降伏応力、 h_i, n_i は硬化パラメータ、 ϵ_{1i}^{eq} は相当塑性ひずみである。また各介在物内部の平均塑性ひずみ増分は、Prandtl-Reuss の関連流れ則の形で式 (5) に対応して

$$\dot{\epsilon}_{1i}^p = \frac{1}{H_i} \frac{\sigma'_{1i} \otimes \sigma'_{1i}}{4(J_2)_i} \quad (7)$$

と与えられるものとする。ここに H_i は式 (5) の微係数テンソルで与えられる硬化係数であり、 σ'_{1i} は相当応力である。 $\otimes$ はテンソル積を表す。

(3) 巨視的剛性と母材の剛性

巨視的な応力増分・ひずみ増分を、母材と介在物の体積比率を重みとした平均によって

$$\dot{\sigma} \equiv (1 - f_1 - f_2) \dot{\sigma}_M + f_1 \dot{\sigma}_{11} + f_2 \dot{\sigma}_{12} \quad (8)$$

$$\dot{\epsilon} \equiv (1 - f_1 - f_2) \dot{\epsilon}_D + f_1 \dot{\epsilon}_{11} + f_2 \dot{\epsilon}_{12}$$

で定義する。式 (1) から式 (9) により、材料の平均応力増分平均ひずみ増分関係 $\dot{\epsilon} = X \dot{\sigma}$ が形式的に

$$\dot{\epsilon} = (\overline{C}^{-1} + \overline{D}^P) \dot{\sigma} = X \dot{\sigma} \quad (9)$$

と書ける。ここに $\overline{C}$ は介在物が弾性体の場合に求められる平均弾性テンソルであり、 $\overline{D}^P$ には介在物の降伏の影響が含まれる。

上式を用いて 図-1 の材料の巨視的挙動を解析する訳であるが、興味深いのは母材の体積比率を 0 としても、

$\overline{C}$ と $\overline{D}^P$ が母材の弾性定数を含むという点にある。これは式 (1) において、母材のひずみに介在物の相互作用が含まれているからである。その母材の弾性定数は、複合材料のひずみエネルギー²⁾

$$U = \frac{1}{2} \int \overline{\sigma} \overline{\epsilon} dV - \frac{1}{2} \int \sigma^d \epsilon^* dV \quad (10)$$

を最小にするという条件から求めることにする。ここに σ^d は母材と介在物内部の相互作用による応力の変動分を表す。数値解析は、境界で $\overline{\sigma}$ を与えた場合（補ひずみエネルギーに相当）と $\overline{\epsilon}$ を与えた場合（ひずみエネルギーに相当）の二通りについて行う。

4. 数値解析例

ここでは、現在解析が済んでいる弾性域での平均弾性の評価について結果を示す。形状を球形と仮定した各材料のヤング率とポアソン比をそれぞれ、 $E_1 = 100(\text{MPa})$, $E_2 = 1(\text{GPa})$, $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.4$ とする。材料 2 の体積比率によって表したヤング率の評価が 図-2 であり、ポアソン比の評価が 図-3 である。図中の上添え字 S は $\overline{\epsilon}$ を与えた時に得られる平均弾性定数、C は $\overline{\sigma}$ を与えた時に得られる平均弾性定数であることを表す。また比較のために、通常の森・田中の理論により得られる平均弾性定数の上下界と、平均弾性の上限・下限を与える Voigt の解および Reuss の解をあわせて示した。図より明らかなように、本手法による解は他の手法に比較して良好な上界と下界を与えていることがわかる。

参考文献

- 1) Eshelby, J. D. : The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems, *Proc. Roy. Soc. London.*, Vol.A241, pp.376-396, 1957.
- 2) Mura, T. : *Micromechanics of Defects in Solids*, Martinus Nijhoff Publ, 1982.
- 3) Mori, T. and Tanaka, K. : Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions, *Act. Metall.*, Vol.21, pp.571-574, 1973.
- 4) Malvern, L. E. : *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, 1969.