拡散型方程式の時間領域境界要素解析における離散作用素積分法の適用

福井大学大学院　学生会員　○　浦　勝一
福井大学大学院　正会員　　　福井 卓雄

1 はじめに

拡張された拡散方程式の時間領域境界要素法の定式化について述べる。ここで扱う拡散方程式は、場に拡散物質の発生源が存在し、かつ、その発生強度が場のポテンシャルに比例する場合である。一般に、この種の問題の時間域の基本解を閉じた形で表現することは困難である。しかし、Lubich による離散作用素積分法 [1] を使って構成される時間領域境界要素法 [2] においては、基本解の Laplace 変換だけを利用して解析を進めることができる。ここでは、離散作用素積分法を拡散方程式に適用して、時間領域境界要素法を定式化する。

2 離散作用素積分法

Lubich[1] は、繰り込み積分

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt \qquad (x \geq 0) \tag{1}$$

の離散化繰り込み積

$$\sum_{j=0}^{N} \omega_j(\Delta t)g(x - j\Delta t) \tag{2}$$

における重み ω_j を

$$\omega_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho} F\left(\frac{\delta(\zeta)}{\Delta t}\right)\zeta^{-n-1}\,d\zeta \simeq \frac{\rho^{-n}}{L}\sum_{l=0}^{L-1} F\left(\frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\right)e^{-2\pi inl/L} \tag{3}$$

によって与える方法を提案した。ここに、F は f の Laplace 変換であり、$\delta(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty}\delta_j\zeta^j$ は差分法 (線形多段解法) における生成多項式の商である。また $\zeta_l = \rho e^{2\pi il/L}$ であり、$\rho < 1$ は要求される精度により決定する。

3 拡散型方程式の時間領域境界要素法

拡張された拡散型方程式

$$\left(\nabla^2 - \alpha^2 + \beta^2\right)u = \frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial u}{\partial t} \tag{4}$$

について考える。ここに、$u(\boldsymbol{x}, t)$ はポテンシャルである。また、α、β、γ は、一般には場所の関数であるが、ここでは定数であると仮定する。これらの定数は、α、$\beta \sim O(1)$、$\gamma \sim O(10^2)$ 程度の値であることを想定している。

方程式 (4) の初期値境界値問題を解くことを考える。境界 ∂B 上において、境界値 $u(\boldsymbol{x}, t)$ または $s(\boldsymbol{x}, t) = \partial u(\boldsymbol{x}, t)/\partial n$ のどちらかが与えられているとする。この問題の解は、境界値の繰り込み積の形で

$$C(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x}, t) = \int_{\partial B} G(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}, t) * s(\boldsymbol{y}, t)\,dS_y - \int_{\partial B} S(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}, t) * u(\boldsymbol{y}, t)\,dS_y \tag{5}$$

と表現することができる。ここに、$C(\boldsymbol{x})$ は自由項であり、$G(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}, t)$、$S(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}, t)$ は基本解および二重層核である。また、上式においては、初期値 $u(\boldsymbol{x}, 0) = 0$ を仮定した。(5) は、$\boldsymbol{x}$ を境界に近付けるとき、未知の境界値に関する境界積分方程式となる。

4 離散作用素積分法による境界要素法の定式化

境界積分方程式 (5) の繰り込み積を (2) の和の形に離散化することを考える。(3) によれば、和の重みを計算するためには、基本解の Laplace 変換が必要である。(4) の Laplace 変換は

$$\left[\nabla^2 - \left(\alpha^2 - \beta^2 + \frac{s}{\gamma^2}\right)\right] \hat{u}(\boldsymbol{x}, s) = \left[\nabla^2 - \kappa(s)^2\right] \hat{u}(\boldsymbol{x}, s) = 0 \tag{6}$$

である。ここに、$\hat{u}$ は u の Laplace 変換である。また、$\kappa^2 = \alpha^2 - \beta^2 + s/\gamma^2$ と定義した。s は複素数となるので、κ もまた複素数である。

(6) の基本解および二重層核は, 3 次元問題のとき

$$\hat{G}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}, s) = \frac{e^{-\kappa r}}{4\pi r}, \qquad \hat{S}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}, s) = \frac{\partial \hat{G}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}, s)}{\partial n_y} = -\frac{(1+\kappa r)e^{-\kappa r}}{4\pi r^2}\frac{\partial r}{\partial n_y} \tag{7}$$

2 次元問題のとき

$$\hat{G}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}, s) = \frac{1}{2\pi} K_0(\kappa r), \qquad \hat{S}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}, s) = \frac{\partial \hat{G}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}, s)}{\partial n_y} = -\frac{\kappa}{2\pi} K_1(\kappa r)\frac{\partial r}{\partial n_y} \tag{8}$$

となる。ここに、$r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$ とおいた。また、K_n は第 2 種の変形 Bessel 関数である。

境界関数を近似基底 ϕ_i により近似して

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \sum_i \phi_i(\boldsymbol{x}) u_i(t), \qquad s(\boldsymbol{x}, t) = \sum_i \phi_i(\boldsymbol{x}) s_i(t) \tag{9}$$

とおく。境界積分方程式 (5) に (2) を代入し、重み (3) を参照すれば、(5) の離散化方程式

$$C(\boldsymbol{x}) \sum_i \phi_i(\boldsymbol{x}) u_i(\Delta t) = \sum_i \sum_{k=1}^{n} A_i^{n-k}(\boldsymbol{x}) s_i(k\Delta t) - \sum_i \sum_{k=1}^{n} B_i^{n-k}(\boldsymbol{x}) u_i(k\Delta t) \tag{10}$$

が得られる。ここに、A_i^m、B_i^m は影響関数であり、

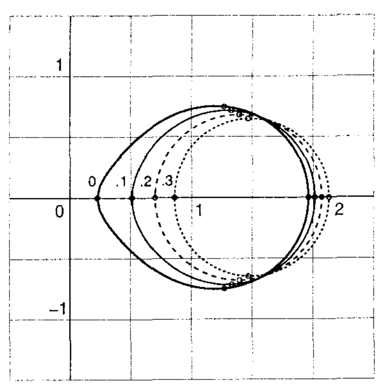
$$A_i^m(\boldsymbol{x}) = \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[\int_{\partial B} \hat{G}\left(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}, \frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\right) \phi_i(\boldsymbol{y}) dS_y\right] e^{-2\pi i m l/L} \tag{11}$$

$$B_i^m(\boldsymbol{x}) = \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[\int_{\partial B} \hat{S}\left(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}, \frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\right) \phi_i(\boldsymbol{y}) dS_y\right] e^{-2\pi i m l/L} \tag{12}$$

となる。離散化方程式 (10) を逐次的に解くことにより、拡散方程式 (4) の初期値境界値問題の解を得る。

右の図は、ζ が半径 $\rho = 0.95$ の円周上にあるときの $\kappa = \alpha^2 - \beta^2 + \delta(\zeta)/\Delta t\gamma^2$ の値の範囲を示したものである。$\Delta t\gamma^2 = 1$ とし、$\alpha^2 - \beta^2 = 0, 0.1, 0.2, 0.3$ のときの値を示した。0 の場合には通常の拡散方程式 (熱伝導方程式) と同じになる。この値が大きいほど、値が実部の大きい方に移動し、半径がやや小さくなっている。$\alpha^2 - \beta^2$ が負の場合については検討中である。

この図より、少なくとも $\alpha^2 - \beta^2$ が正の場合には波動方程式の場合と同様な解析ができるものと期待できる。現在、解析を進めているところであり、結果の詳細については発表会当日報告する。



参考文献

[1] C. Lubich : Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Mumer. Math.*, **52**, pp. 129–145, 1988.

[2] 岡山美央、福井卓雄 : 離散作用素積分法を利用した時間領域境界要素法の解析, 第 56 回年次学術講演会講演概要集 I, pp. 491, 2003.