

## 離散作用素積分境界要素法の高速化について

福井大学大学院 学生会員 ○ 岡山 美央  
福井大学大学院 正会員 福井 卓雄

### 1 はじめに

本研究は, Lubich[1] の離散作用素積分法 (Operational Quadrature Method) による波動問題の時間領域境界要素法への高速多重極法の適用を目的とする。

Lubich の離散作用素積分法とは, 繰込み積分の離散化において, 積分核をその Laplace 変換で表現し, 一部の積分を差分解に置き換えることによって, 近似式の重みを決定する方法である。Volterra 型の積分方程式を効率よく, かつ安定に解析することができる。この離散作用素積分法による波動問題の時間領域境界要素法についてはすでに著者らによって報告され, 2 次元波動問題において数値解析を行っている [2]。

ここでは, 波動問題の離散作用素積分境界要素法について述べ, この方法への高速多重極法の適用について紹介する。

### 2 離散作用素積分境界要素法

離散作用素積分法を時間領域境界積分方程式

$$C(x)u(x, t) = \tilde{u}(x, t) + \int_{\partial B} G(x; y, t) * s(y, t) dS_y - \int_{\partial B} S(x; y, t) * u(y, t) dS_y \quad (1)$$

に適用する。ここに,  $C$  は点  $x$  の位置に依存するパラメータで,  $G, S$  は基本解および第二基本解である。 $\tilde{u}$  は入射波であり, 初期条件を満足する。

境界関数および離散化繰込み積分を (1) に代入すれば

$$C(x) \sum_i \phi_i(x) u_i(n\Delta t) = \sum_i \sum_{k=0}^{n-1} A_i^{n-k}(x) s_i(k\Delta t) - \sum_i \sum_{k=0}^{n-1} B_i^{n-k}(x) u_i(k\Delta t) \quad (2)$$

となる。ここに,  $\phi_i$  は境界関数の近似基底であり, 影響関数  $A_i^m, B_i^m$  は

$$A_i^m(x) = \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_{\partial B} \hat{G}(x; y, s_l) \phi_i(y) e^{-2\pi i m l / L} dS_y \quad (3)$$

$$B_i^m(x) = \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_{\partial B} \hat{S}(x; y, s_l) \phi_i(y) e^{-2\pi i m l / L} dS_y \quad (4)$$

である。ここに,  $s_l = \delta(\zeta_l)/c\Delta t$  とする。上式の係数の誤差を  $O(\sqrt{\epsilon})$  とすると,  $\rho^L = \sqrt{\epsilon}$  の関係がある。 $\rho$  の値はこれを条件として決定する。 $L$  が大きい場合には,  $1 (\rho < 1)$

に近い値となる。 $\hat{G}, \hat{S}$  はそれぞれ  $G, S$  の Laplace 変換で, 2 次元波動問題の場合には次のように与えられる。

$$\hat{G}(x; y, s) = \frac{1}{2\pi} K_0(s|x-y|) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \hat{S}(x; y, s) &= \frac{\partial \hat{G}(x; y, s)}{\partial n_y} \\ &= -\frac{s}{2\pi} \frac{\partial |x-y|}{\partial n_y} K_1(s|x-y|) \end{aligned} \quad (6)$$

ここに,  $K_n$  は第 2 種変形 Bessel 関数である。

以上によって, 通常の離散化手法を用いる場合と同様に, 時間領域境界要素法を構成することができる。

### 3 高速多重極境界要素法

#### 3.1 高速多重極法の適用

境界要素法によって自由度の大きい問題を扱う場合には, 高速多重極法の適用が必要になる。そこで, この方法への高速多重極法の適用を試みる。

空間領域における積分  $\sum_i A_i^m(x_j) s_i(k\Delta t)$  の計算を高速化することを考える。

$$\begin{aligned} &\sum_i A_i^m(x_j) s_i(k\Delta t) \\ &= \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[ \sum_i s_i(k\Delta t) \int_{\partial B} \hat{G}(x_j, y, s_l) \phi_i(y) dS_y \right] \\ &\quad \times e^{-2\pi i m l / L} \end{aligned} \quad (7)$$

この式において,  $j = 1, \dots, M, m = 0, \dots, L-1$  であるから,  $k$  を与えたとき, 一組の  $s_i(k\Delta t)$  に対して  $ML$  個の値が得られ, これを (2) の右辺の計算に利用できる。この式において, 右辺の [ ] 内は高速多重極法により,  $l$  についての和は FFM により計算する。したがって, この場合の計算量はほぼ  $O(ML)$  となる。 $k = 0, \dots, N-1$  についての計算を実行するためには,  $O(MLN)$  の計算が必要となる。従来法では (3) の計算に FFT を使用しても,  $O(M^2L)$  の計算が必要となる。時間ステップ計算には  $O(M^2LN)$  の計算が必要である。したがって, 要素数  $M$  の極めて大きいときには効率の良い計算法となる。

#### 3.2 多重極展開と移動公式

図-1 に示すように, 2 点  $x, y$  に対して, 源点  $y$  の近くに  $y_0$  をとり,  $x-y_0$  および  $y-y_0$  の極座標表現を, それぞれ  $(r, \theta), (\rho, \phi)$  とする。

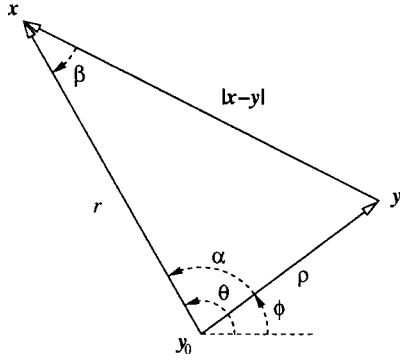


図-1 多重極展開における座標系

基本特異解 (5) を Graf の加法定理 [3] を用いて展開すると

$$\hat{G}(x; y, s_l) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n(sr) I_n(s\rho) e^{in(\theta-\phi)} \quad (8)$$

となる。ここに、 $I_n$  は第 1 種変形 Bessel 関数である。この式より、多重極展開を

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n K_n(sr) e^{in\theta} \quad (9)$$

で定義する。 $M_n$  は多重極モーメントで、(8) より基本特異解 (5) の場合には

$$M_n^G = I_n(s\rho) e^{-in\phi} \quad (10)$$

となる。第 2 基本特異解の多重極モーメントは (6) により、 $M_n^G$  の法線導関数をとれば

$$M_n^S = \left[ sI'_n(s\rho) n_\rho - in \frac{I_n(s\rho)}{\rho} n_\phi \right] e^{-in\phi} \quad (11)$$

となる。ここに、 $(n_\rho, n_\phi)$  は単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  の  $(\rho, \phi)$  座標成分である。

多重極展開 (9) の勾配の場合は次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{s}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n K'_n(sr) e^{in\theta} \quad (12)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{i}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n M_n K_n(sr) e^{in\theta} \quad (13)$$

また、局所展開は

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n I_n(sr) e^{-in\theta} \quad (14)$$

で定義される。展開中心の移動による係数の変換関係は、Graf の加法定理を用いて

$$\tilde{M}_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} M_m I_{n-m}(s\rho) e^{-i(n-m)\phi} \quad (15)$$

$$L_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m M_m K_{n+m}(sr) e^{i(n+m)\theta} \quad (16)$$

$$\tilde{L}_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-m} L_m I_{n-m}(s\rho) e^{i(n-m)\phi} \quad (17)$$

のように得られる。これらの式で、 $(\rho, \phi)$  はそれぞれ  $y_0 - y_0'$ ,  $y_0 - x_0$ , および  $x_0 - x_0'$  の極座標である。

これらの諸公式を用いて高速多重極アルゴリズム [4] を適用すれば、(7) の [ ] 内を  $O(M)$  で計算することができる。

### 3.3 計算時間の比較

半径  $a$  の円形の空洞に平面波が入射するときの散乱問題を例として、解析における計算時間を確認する。入射波としては応力ステップ波を用い、規準時間を平面波が空洞を通過する時間  $T_0 = 2a/c_T$  とした。節点間隔を  $\Delta s = 2\pi a/M$  とし、時間増分は  $\Delta t = T_0/8$  である。また、 $L = 64$  とした。表-1 は  $p = 10$  として計算した通常解法 (BEM) と現解法 (FMBEM) の計算時間である。影響関数は BEM では全成分を一度に計算し、FMBEM では第 0 ステップの影響係数だけを計算している。1 ステップ当たりの計算時間は BEM の方がはるかに少ないが、影響係数の計算は FMBEM の方が計算量は少ない。また、BEM の計算時間内に FMBEM では何ステップ計算可能かを算出した。今回対象とした要素数  $M$  では BEM の方が計算効率は上であるが、計算可能なステップ数を見てみると、FMBEM の場合の  $M = 2048$  では 71 ステップ計算可能であるため、BEM の計算時間より短いことがわかる。したがって、要素数  $M$  が 2048 以上の問題では、高速多重極法の適用は有効であると考えられる。

表-1 計算時間の比較

|       | M    | 影響係数         | 1 ステップ      | 可能数 |
|-------|------|--------------|-------------|-----|
| BEM   | 128  | 420.58 sec   | 0.01 sec    |     |
|       | 256  | 1687.58 sec  | 0.05 sec    |     |
|       | 512  | 6561.25 sec  | 0.19 sec    |     |
|       | 1024 | 26377.77 sec | 0.77 sec    |     |
| FMBEM | 128  | 48.20 sec    | 84.61 sec   | 4   |
|       | 256  | 144.98 sec   | 208.35 sec  | 7   |
|       | 512  | 491.33 sec   | 259.50 sec  | 23  |
|       | 1024 | 1874.94 sec  | 733.61 sec  | 33  |
|       | 2048 | 7164.59 sec  | 1376.06 sec | 71  |

## 4 おわりに

離散作用素積分境界要素法へ高速多重極法を適用するため、まず多重極展開を行い、次に数値計算時間を確認した。

## 参考文献

- [1] C. Lubich : Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Numer. Math.*, **52**, pp. 129-145, 1988.
- [2] 岡山美央, 福井卓雄 : 離散作用素積分法を利用した時間領域境界要素法の解析, 第 56 回年次学術講演会講演概要集, p. 491, 2003.
- [3] Abramowitz, M. and I.A. Stegun : *Handbook of Mathematical Functions*, 1960, Dover.
- [4] 福井卓雄, 勝本順三 : 2 次元 Helmholtz 方程式のための高速多重極アルゴリズムと境界要素法への応用, 境界要素法論文集, **14**, pp. 81-86, 1997.