2次元直交異方性静弾性問題の高速多重極境界要素法による解析

福井大学大学院 学生会員 ○ 小林 孝彰
福井大学大学院 学生会員 王 徳法
福井大学大学院 正会員 福井 卓雄

1 はじめに

本研究は, 2次元直交異方性体の静弾性問題において, 高速多重極法を境界要素法に適用することを目的とする。境界要素法を用いて解析を行う場合, 密行列を解くことによる計算負荷の問題がある。 これを回避する方法として高速多重極法を用いる。

以下では, 2次元直交異方性静弾性問題の解を複素ポテンシャルで表現し, その表現をもとに境界要素法と対応する高速多重極法を導く。最後に, 簡単な例題の数値解析によって本解法の計算効率を確認する。

2 直交異方性弾性体の2次元理論

(1) 基礎式

直交異方性弾性体の2次元静的問題において, ひずみ-変位関係, つり合い方程式, ひずみ-応力関係は

$$\begin{gathered}\epsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \quad \sigma_{ij,j} + X_i = 0 \\ \sigma_{ij} = c_{ij}^{kl}\epsilon_{kl} \quad \text{または} \quad \epsilon_{ij} = s_{ij}^{kl}\sigma_{kl}\end{gathered} \tag{1}$$

である。ここに, u_i は変位, ϵ_{ij} はひずみ, σ_{ij} は応力, X_i は物体力, c_{ij}^{kl} は弾性テンソル, s_{ij}^{kl} はコンプライアンステンソルである。

(2) 変位および応力の表現

基礎式 (1) を満足する変位および応力場は, 任意の解析関数 ϕ, χ を用いて

$$\begin{aligned}D &= u_1 + iu_2 \\ &= \delta_1\phi'(z_1) + \rho_1\bar{\phi}'(\bar{z}_1) + \delta_2\chi'(z_2) + \rho_2\bar{\chi}'(\bar{z}_2) \\ \Phi &= \sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\sigma_{12} \\ &= -4\gamma_1^2\phi''(z_1) - 4\bar{\phi}''(\bar{z}_1) - 4\gamma_2^2\chi''(z_2) - 4\bar{\chi}''(\bar{z}_2) \quad (2) \\ \Theta &= \sigma_{11} + \sigma_{22} \\ &= 4\gamma_1\phi''(z_1) + 4\bar{\gamma}_1\bar{\phi}''(\bar{z}_1) + 4\gamma_2\chi''(z_2) + 4\bar{\gamma}_2\bar{\chi}''(\bar{z}_2)\end{aligned}$$

で与えられる [1]。ここに z_1, z_2 は点 $z = x_1 + ix_2$ に対して, $z_\alpha = z + \gamma_\alpha\bar{z}$ で与えられる。γ_1, γ_2 は α^2 に関する2次方程式

$$s_{22}^{22}\alpha^4 - 2(s_{22}^{11} + 2s_{12}^{12})\alpha^2 + s_{11}^{11} = 0 \tag{3}$$

の2根 α_1^2, α_2^2 を用いて, $\gamma_\lambda = (\alpha_\lambda - 1)/(\alpha_\lambda + 1)$ $(\lambda = 1, 2)$ で与えられる。また δ_λ, ρ_λ は変位場を決定するためのパラメーターで, $\beta_\lambda = s_{22}^{11} - s_{22}^{22}\alpha_\lambda^2$ $(\lambda = 1, 2)$ とおくと以下のように定義される。

$$\begin{aligned}\delta_1 &= (1+\gamma_1)\beta_2 - (1-\gamma_1)\beta_1 \\ \delta_2 &= (1+\gamma_2)\beta_1 - (1-\gamma_2)\beta_2 \\ \bar{\rho}_1 &= (1+\gamma_1)\beta_2 + (1-\gamma_1)\beta_1 \\ \bar{\rho}_2 &= (1+\gamma_2)\beta_1 + (1-\gamma_2)\beta_2\end{aligned} \tag{4}$$

3 境界要素法

(1) 境界積分方程式

式 (1) に対する境界値問題の解は, Somigliana の公式

$$\begin{aligned}C_{ij}u_j(\boldsymbol{x}) = \mathring{u}_i(\boldsymbol{x}) &+ \textstyle\int_{\partial B} G_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})T_{jk}^{y}u_k(\boldsymbol{y})\,ds_y \\ &- \textstyle\int_{\partial B} S_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})u_i(\boldsymbol{y})\,ds_y\end{aligned} \tag{5}$$

により得られる。ここに, $\mathring{u}_i$ は物体力による特解, $T_{ij}^{n}u_j = \sigma_{ij}[u_k]n_j$ は境界応力である。C_{ij} は自由項で, 点 $\boldsymbol{x}$ が領域内部にあるとき δ_{ij}, 滑らかな境界上にあるとき $\delta_{ij}/2$, 領域および境界の外部にあるとき 0 の値をとる。また, G_{ij}, S_{ij} はそれぞれ基本解および二重層核であり, $S_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = T_{jk}^{y}G_{ki}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ である。

(2) 基本解および二重層核

基本解および二重層核は, それぞれ, 単位集中力 P および単位くい違い U による変位により与えられる。(2) によって変位・応力は複素ポテンシャル ϕ, χ から決定できるので, 基本解に対する ϕ^G, χ^G および二重層核に対する ϕ^S, χ^S を与えれば, 式 (5) の諸量を計算することが可能である。これらの関数は

$$\phi^G(z_1) = \frac{Q}{2\pi}z_1\log z_1, \quad \chi^G(z_2) = \frac{R}{2\pi}z_2\log z_2 \tag{6}$$

$$\phi^S(z_1) = \frac{V}{2\pi}\log z_1, \quad \chi^S(z_2) = \frac{W}{2\pi}\log z_2 \tag{7}$$

によって与えられる。ここに, 係数 Q, R および V, W は

$$\begin{aligned}Q &= \frac{(1+\alpha_1)}{8(1+\gamma_1)(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)s_{22}^{22}}\left(\bar{\rho}_1 P + \delta_1\bar{P}\right) \\ R &= \frac{-(1+\alpha_2)}{8(1+\gamma_2)(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)s_{22}^{22}}\left(\bar{\rho}_2 P + \delta_2\bar{P}\right) \\ V &= \frac{(1+\alpha_1)}{4(1+\gamma_1)(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)s_{22}^{22}}\hat{\nu}_1\hat{U}_1 \\ W &= \frac{-(1+\alpha_2)}{4(1+\gamma_2)(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)s_{22}^{22}}\hat{\nu}_2\hat{U}_2\end{aligned}$$

となる。$P = P_1 + iP_2$ である。また, $\hat{\nu}, \hat{U}$ は $U = U_1 + iU_2$ および単位方向ベクトル $\nu = n_1 + in_2$ について, $\hat{\nu}_\lambda = \nu - \gamma_\lambda\bar{\nu}$, $\hat{U}_\lambda = U - \gamma_\lambda\bar{U}$ $(\lambda = 1, 2)$ で定義する。

4 高速多重極法

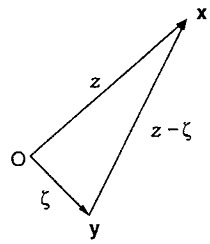
等方性弾性体問題 [2] と同様に複素ポテンシャル ϕ, χ について高速多重極法を構成する。

(1) 多重極展開と局所展開

図-1 のように, 源点 $\boldsymbol{y}$, 観測点 $\boldsymbol{x}$ および $\boldsymbol{y}$ の近傍の点 O を考える。ϕ, χ は解析関数であるから, $\boldsymbol{x}$ が遠方にあるときには, 原点からの影響を O 点まわりの多重極展開

$$\phi(z_1) = \frac{1}{2\pi}\left[M_{-1}z_1\log z_1 - M_0\log z_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{M_n}{z_1^n}\right] \tag{8}$$

$$\chi(z_2) = \frac{1}{2\pi}\left[N_{-1}z_2\log z_2 - N_0\log z_2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{N_n}{z_2^n}\right] \tag{9}$$



図–1 多重極展開の座標系

で表すことができる。また, x の近傍ではこれらを局所展開

$$\phi(z_1) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n z_1^n, \qquad \chi(z_2) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n z_2^n \tag{10}$$

により表すことができる。

(2) 移動公式

O 点における多重極展開を O' 点における多重極展開に変換する。O' 点から見た O 点を ζ , 観測点 z に対して $|z_1| > |\zeta_1|$ とする。 新しい多重極モーメント M_n' は

$$M_{-1}' = M_{-1}, \qquad M_0' = \zeta_1 M_{-1} + M_0$$

$$M_n' = \frac{\zeta_1^{n+1}}{n(n+1)} M_{-1} + \frac{\zeta_1^n}{n} M_0 + \sum_{m=1}^{n} \binom{n-1}{m-1} \zeta_1^{n-m} M_m \tag{11}$$

となる。

次に, O 点における多重極展開を O' 点における局所展開に変換する。$\overrightarrow{OO'}$ を ζ として $|z_1| < |\zeta_1|$ とする。 多重極モーメント M_n からえられる局所展開係数 K_n は

$$K_1 = (\log \zeta_1 + 1) M_{-1} - \frac{M_0}{\zeta_1} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m M_m}{\zeta_1^{m+1}}$$

$$K_n = \frac{(-1)^n}{\zeta_1^n} \left[\frac{a_1 M_{-1}}{n(n-1)} + \frac{M_0}{n} + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{n+m-1}{m-1} \frac{M_m}{\zeta_1^m} \right] \tag{12}$$

となる。

最後に O 点における局所展開を O' 点における局所展開に変換する。$\overrightarrow{OO'}$ を ζ として $|z_1| < |\zeta_1|$ とする。新しい局所展開係数 K_n' は

$$K_n' = \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} \zeta_1^{m-n} K_m \tag{13}$$

となる。N_n, L_n についても同様な関係式が得られる。

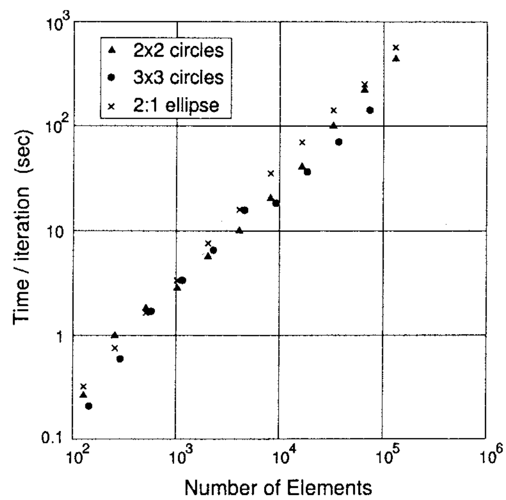
5 計算時間と記憶容量の検証

高速多重極法の効果を確認するために, 2×2 個の円形空洞問題, 3×3 個の円形空洞問題, 径の比が 2 : 1 で長径が水平から 30° 傾いた楕円の空洞問題を解析し, 反復 1 回あたりの計算時間と必要記憶容量を計測した。弾性係数は以下のようにとっている。

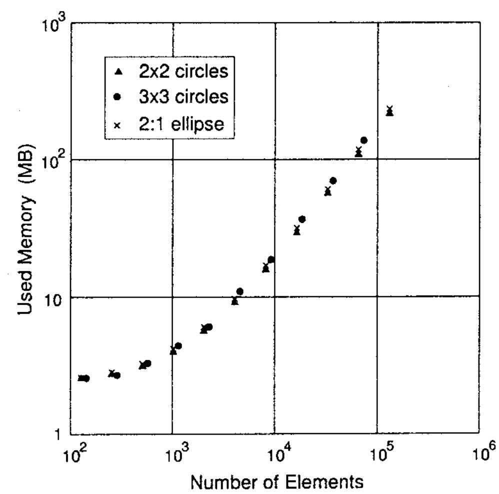
$$E_1 = E,\ E_2/E_1 = 2,\ \nu_{12} = 0.25,\ G_{12}/E_1 = 0.4$$

得られた計算時間を図-2 に, 記憶容量を図-3 に示す。ここでは, 多重極展開は M_{25}, N_{25} までをとり, 2 近傍を近傍としている。また, 最小セルに含まれる要素数の最大値は 8 である。

反復 1 回あたりの計算時間は, 図-2 に示されるように, 取り扱う問題によって多少異なるものの, 要素数が 1000 以上の場合にはほぼ要素数に比例していることがわかる。また使用記憶容量においても図-3 から要素数が 1000 以上の場合には, 要素数にほぼ比例している。



図–2 反復 1 回あたりの計算時間



図–3 計算に必要とした総記憶容量

6 おわりに

2 次元直交異方性体の静弾性問題において, 高速多重極法の定式化を行い, その数値解析手法を述べた。多重極展開, 局所展開において複素関数の表現を用いることで, 高速多重極アルゴリズムの導入を容易にしている。高速多重極法を用いることで, 計算時間・記憶容量が要素数 N に対してともに $O(N)$ であることを検証し, 本解析の有効性を確認した。

参考文献

[1] Green, A.E. and W. Zerna : *Theoretical Elasticity*, 2nd ed. Oxford, (1968).

[2] 福井卓雄, 持田哲郎 : 高速多重極境界要素法の 2 次元静弾性問題への応用, 境界要素法論文集, **13**, pp. 131–136, (1996).