

写像変換を用いたエレメントフリー解析と 3次元弾性問題への適用

信州大学大学院

○小原正慎

信州大学工学部 正会員

大上俊之

信州大学工学部 正会員

小山 茂

1. はじめに

近年、要素分割を必要としないエレメントフリーガラキン法 (EFGM) に関する研究が盛んに行われている^{1),2)}。EFGMは関数近似に移動最小二乗法 (MLSM) を用いることによりメッシュレス化を可能としている手法であるが、基本境界条件処理が複雑になるといった問題がある。

本研究は、写像変換を用いることによって、基本境界条件を直接処理でき、曲線境界を有する形状の問題に対しても適応できるエレメントフリー法を提案するもので、3次元弾性問題への適用を検討する。

2. 写像変換を用いた EFGM

(1) 写像変換と内挿関数

パラメータ t によって決まる関数を $u(t)$ 、内挿関数を $\psi_i(t)$ とすると、 $i = 0 \sim n$ の $n+1$ 個の u_i を通る近似関数 $u^h(t)$ は

$$u^h(t) = \sum_{i=0}^n \psi_i(t) u_i \quad (1)$$

と表すことができる。3次元の場合は、図-1に示すように領域の境界に沿ってパラメータ t_1, t_2, t_3 を導入すれば、写像変換することによって図-2のように直交格子が得られる。空間内に与えられた $(n_1+1) \times (n_2+1) \times (n_3+1)$ 個の点をとる平面 (x, y, z) は t_1, t_2, t_3 の関数として次式によって表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} x(t_1, t_2, t_3) &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sum_{k=0}^{n_3} \psi_i(t_1) \psi_j(t_2) \psi_k(t_3) x_{ijk} \\ y(t_1, t_2, t_3) &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sum_{k=0}^{n_3} \psi_i(t_1) \psi_j(t_2) \psi_k(t_3) y_{ijk} \\ z(t_1, t_2, t_3) &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sum_{k=0}^{n_3} \psi_i(t_1) \psi_j(t_2) \psi_k(t_3) z_{ijk} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに $x_{ijk} = x(i, j, k)$, $y_{ijk} = y(i, j, k)$, $z_{ijk} = z(i, j, k)$ であり、 t_1, t_2, t_3 は、それぞれ、 $0 \leq t_1 \leq n_1$, $0 \leq t_2 \leq n_2$, $0 \leq t_3 \leq n_3$ を満たす実数である。変位 u, v, w の関数近似に対しても内挿関数 $\psi_i(t)$ を適用することにより、関数値 $u(t_{1i}, t_{2j}, t_{3k})$, $v(t_{1i}, t_{2j}, t_{3k})$, $w(t_{1i}, t_{2j}, t_{3k})$ が節点の変位値 u_{ijk} , v_{ijk} , w_{ijk} そのもの

を表すことになるので、基本境界条件の処理を通常の FEM と同様の方法で行うことができる。

本研究では内挿関数 $\psi_i(t)$ として Lagrange 多項式と節点間ベクトルを有限フーリエ級数で表現する関数³⁾を適用した。

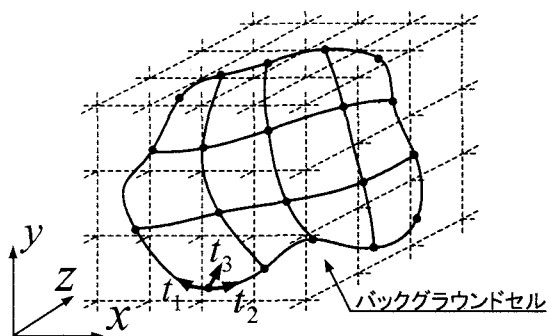


図-1 実平面上

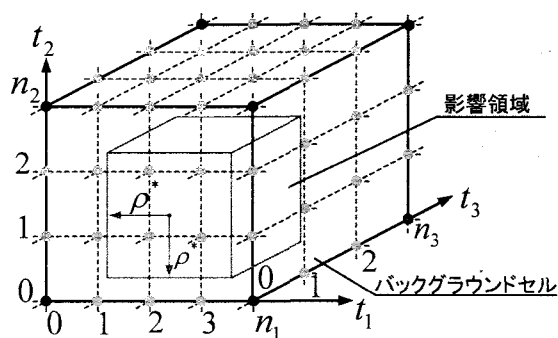


図-2 写像平面上

(2) 写像平面上における剛性マトリックスの作成

EFGMによる定式化はFEMの定式化とほぼ同じであり、実平面上的デカルト座標系において弱形式化された弾性問題の剛性マトリックスは、形式的にはEFGMでもFEMと同様に以下のような形で求めることができる。

$$\mathbf{K} = \iiint_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy dz \quad (3)$$

ここに、 Ω は実平面における領域を示し、 $\mathbf{K}$ は剛性マトリックス、 $\mathbf{B}$ はひずみ変位マトリックス、 $\mathbf{D}$ は応力ひずみマトリックスである。EFGMでは要素そのものが存在しないため解析対象の領域と積分のための領域

を区別して、図-2に示すようなバックグラウンドセルと呼ばれる規則的な格子状の積分のためのセルを設定し、セルごとに領域積分を行う。式(3)を写像平面(t_1, t_2, t_3)座標に変換することによって、 $\mathbf{K}$ は以下のように写像平面上におけるバックグラウンドセルごとの積分の和として表すことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \iiint_{\Omega^*} \mathbf{B}^{*T} \mathbf{D} \mathbf{B}^* |J_D| dt_1 dt_2 dt_3 \\ &= \sum_{\text{cell}} \iiint_{\Omega_{\text{cell}}^*} \mathbf{B}^{*T} \mathbf{D} \mathbf{B}^* |J_D| dt_1 dt_2 dt_3 \quad (4) \end{aligned}$$

ここに、 Ω^* は写像平面における領域、 $\mathbf{B}^*$ は写像平面上で求めた $\mathbf{B}$ を示し、 $|J_D|$ はヤコビアンである。式(4)の第2式に示すように、領域積分がセルごとの積分の和と一致することが本手法の大きな特徴である。

3. 解析例

正解値が既知な曲線境界を有する解析モデルとして、図-3に示すような一様な圧力を受ける圧肉円筒問題を解析する。対称性より1/4部分について考える。総節点数を $95 \times 3 = 285$ 、領域積分のためのセルの数を $72 \times 3 = 216$ とし、影響領域の大きさは $\rho^* = 1 \sim 4$ 、数値積分は $3 \times 3 \times 3$ のGauss積分を用いた。解析モデルを図-4に示す。なお、図-5、図-6には、比較のためにFEMによる誤差分布も示した。

図-5は図-4に示す中央線A-A'線に沿うr方向変位の厳密解に対する相対誤差の分布を示したものである。 $\rho^* = 1$ のとき $\theta = 10 \sim 80$ の間で有限フーリエ近似、Lagrange多項式ともに0.06%以下と精度のよい結果が得られている。 $\rho^* = 4$ の場合は $\theta = 25 \sim 65$ の間で0.05%と精度が向上するが、側方境界の近傍では逆に精度の低下が見られる。

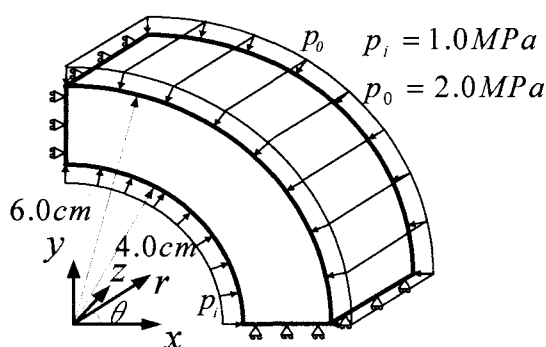


図-3 圧肉円筒モデル

図-6は応力の比較図で、図-4に示す中央線A-A'線付近のGauss積分点(図-4中のB-B'線に沿う点)におけるr方向応力 σ_r の誤差分布を示している。 $\rho^* = 1$

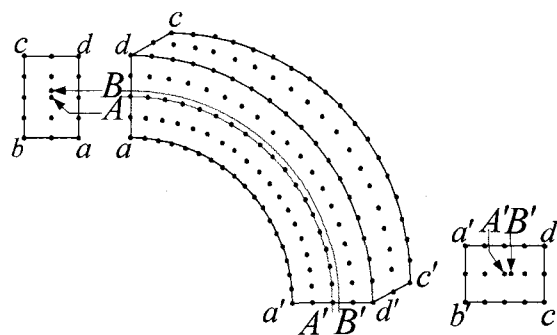


図-4 EFEMの節点配置(実平面)

のときは、FEMと近い結果となっている。 ρ^* が大きくなると、 $\theta = 20 \sim 70$ の間で2%以下と精度が向上し、安定した結果が得られている。

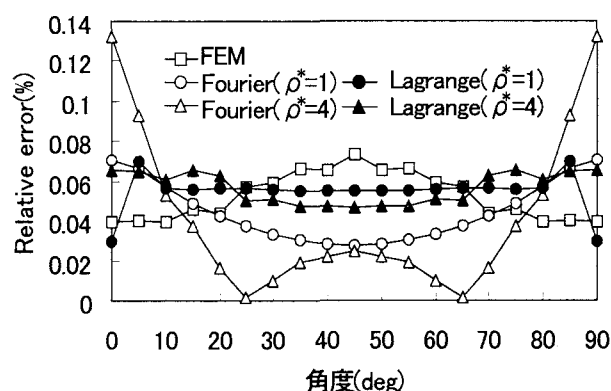


図-5 r方向変位誤差分布

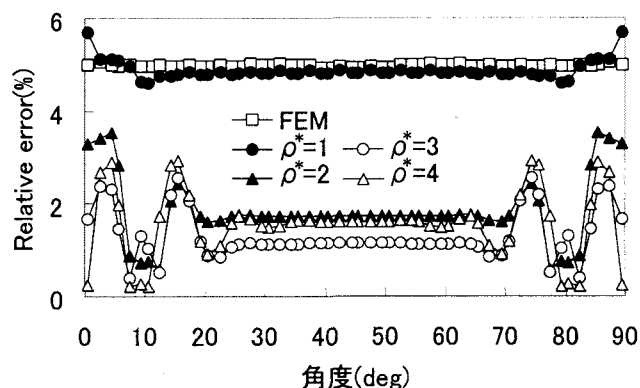


図-6 B-B線上的 σ_r の誤差分布

4. おわりに

簡単な数値計算例を通して本手法が曲線境界を有する3次元弾性問題へ適用可能であることが示された。他の解析例については当日報告する予定である。

参考文献

- 1) Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L.: Element-free Galerkin methods, *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol.37, 229-256, 1994.
- 2) 鈴木克幸他: 特集 メッシュレス法, 計算工学, Vol.7, No.1, 2-23, 2002
- 3) 草間孝志, 大上俊之: 有限フーリエ級数を用いた内挿関数の改良, 土木学会論文集, 第446号/I-19, pp.167-175, 1992.