２次の区分多項式を利用した有限帯板要素について

名古屋市立大学大学院芸術工学研究科　正会員　草間晴幸

１．はじめに

著者は、参考文献 3)、4) に見られるように、有限要素法関連の解りやすい教育用図書の作成に努めてきた。しかしながら、その内容は単に教育用レベルに留まらず、研究シーズが多分に包含されているとの評価も受けている。その延長線上の研究として、参考文献 1) では１次の区分多項式を利用した柱の座屈解析について、また、参考文献 2) では２次の区分多項式を利用した変断面柱の座屈解析について報告した。本研究では、形状関数として通常 **Hermit** 多項式が使用される有限帯板要素に前報告で利用した２次の区分多項式を応用して、帯板要素の剛性マトリックスや幾何剛性マトリックスがシンプルで美しい形で表現されることを示す。

２．定式化

長さａ、幅ｂの有限帯板要素のたわみ関数を次のように仮定する。

$$w = <\phi> \{w\} \sin \pi y/a \tag{Eq・1}$$

ここで、$<\phi>$ は次式で表される 2 次の区分多項式の形状関数が構成要素である行ベクトルである。

$$<\phi> = <\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3>$$
$$\phi_1 = \xi(\xi-1)/2 \quad , \quad \phi_2 = -(\xi+1)(\xi-1) \quad , \quad \phi_3 = \xi(\xi+1)/2 \tag{Eq・2}$$

2 次の区分多項式を Fig.1 に示す。図中、ξ は次式で定義される要素の局所座標変数である。

$$\xi = 2(x - b/2) \tag{Eq・3}$$

また、$\{w\}$ は帯板要素の節点におけるたわみを構成要素とする列ベクトルである。w_i 、w_j は帯板要素の端節点のたわみ、w_c は中間節点のたわみである。

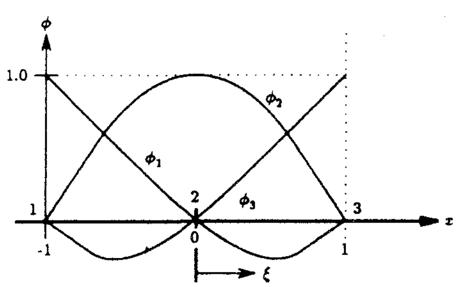

Fig-1

$$\{w\} = \{w_i \quad w_c \quad w_j\}^T \tag{Eq・4}$$

帯板要素の剛性マトリックスおよび幾何合成マトリックスは、それぞれ、次式で計算される。

$$[k_s] = \int_0^a \int_0^b [B]^T[D][B]dxdy = (a/2)(b/2)\int_{-1}^{1}[B]^T[D][B]d\xi$$
$$[k_g] = \int_0^a \int_0^b \{G\} < G > dxdy = (\pi/a)^2(a/2)(b/2)\int_{-1}^{1}\{G\} < G > d\xi \tag{Eq・5}$$

ここで、〈G〉 は $<\phi>$ の微分ベクトルであり、材料マトリックス[D]とひずみマトリックス[B]は、次のようになる。

$$[D] = (Et^3/12)\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & 0 \\ k_2 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -(2/b)^2 & 2(2/b)^2 & -(2/b)^2 \\ (\pi/a)^2(\xi/2)(\xi-1) & -(\pi/a)^2(\xi+1)(\xi-1) & (\pi/a)^2(\xi/2)(\xi+1) \\ -(\pi/a)(2/b)(2\xi-1) & 4(\pi/a)(2/b)\xi & -(\pi/a)(2/b)(2\xi+1) \end{bmatrix}$$

(Eq・6)

以上の式を、(Eq・5) に代入し、積分計算を行うことによって剛性マトリックスと幾何剛性マトリックスは以下のようにシンプルな形で得られる。

$$[k_s]/Et = C_1\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ & 4 & -2 \\ Sym & & 1 \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ & 8 & -1 \\ Sym & & -1 \end{bmatrix}$$

$$+C_3\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ & 16 & 2 \\ Sym & & 4 \end{bmatrix} + C_4\begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ & 16 & -8 \\ Sym & & 7 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = 480k_1(a/b)^2\mu/\pi^2 \quad , \quad C_2 = 40k_2\mu$$

$$C_3 = k_3\mu\pi^2/(a/b)^2 \quad , \quad C_4 = 40k_4\mu \quad , \quad \mu = (\pi^2/720)(1/(a/b))(1/(a/b)^2)$$

$$[k_g]/Et = 12\lambda\mu\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ & 16 & 2 \\ Sym & & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad \lambda = (b/t)^2\sigma_i/E$$

(Eq・7)

3．おわりに

2次の区分多項式を形状関数として利用し、有限帯板要素の剛性マトリックスと幾何剛性マトリックスを導いた。著者は参考文献4) において Hermit 多項式を使用した有限帯板要素に対しても非常に美しい形で剛性マトリックスと幾何剛性マトリックスを表現したが、本稿で取り扱った2次の区分多項式を利用した場合にもシンプルで美しい形で表現することができた。導かれた両マトリックスを具体的な構造問題に適用する際、境界条件が拘束されるなどの問題があるが、この点に関することや具体的な数値計算例は発表当日に行う予定である。

[参考文献]

1) 草間、1次の区分多項式を利用した柱の座屈解析について、H14 年度土木学会中部支部
2) 草間、2次の区分多項式を利用した変断面柱の座屈解析について、H15 年度土木学会中部支部
3) 草間晴幸他2名、初学者のための有限要素解析事始め、ＨＢＪ出版局、1991
4) 草間晴幸・谷山健、有限帯板法、日刊工業新聞社、1994
5) O.C.Zienkiewicz・K.Morgan 著、伊理正男他訳、有限要素と近似、ワイリージャパン、1984