

Spline-Ritz 法を用いた平板の高次振動解析

大同工業大学 学生員○渡辺晶子

大同工業大学 正員 水澤富作

1. はじめに リニア車両の超高速走行や物体の衝突を受ける構造物には、非常に高次の振動や衝撃音が誘発されるので、高次振動や高次騒音による疲労問題が設計上重要な課題になっている¹⁾。数百Hzから数千Hzの高次振動は、高速運動するスペースシャトル、ジェットエンジンにより誘発され、また高速回転するハードディスク、携帯電話や超音波加振からも発生するが、比較的低周波域（百次以内の振動数）での動的応答と比較して、平板の高次振動については、理論的にさほど解明されていない。汎用性の高い有限要素法を適用しても、構造物に対して非常に小さな波長を伴う高次振動の解明は、計算機の計算時間と容量の制限や数値誤差などの問題により、精度の高い解析結果を得ることが困難な問題とされている²⁾。最近、Zhaoら³⁾は、横せん断変形と回転慣性の影響を無視した薄板理論に基づくDSC法を用いて、平板の高次振動解析を行っている。

本研究では、平板の数百次から数千次の振動数や振動モードを精度よく求めるために、高次振動で重要になる横せん断変形や回転慣性の影響を考慮した1次せん断変形理論に基づく spline-Ritz 法⁴⁾を定式化し、平板の高次振動解析を行い、本手法の収束性や精度比較について検討を行っている。

2. 解析手法 図-1に示すように、x軸方向に固有関数を Fourier 級数展開し、y軸方向に spline 関数を仮定した半解析的な spline-Ritz 法⁴⁾を用いて定式化する。横せん断変形と回転慣性の影響を考慮した Mindlin 板理論では、次式に示すような独立したたわみ W と2つの回転角 θ_x, θ_y が未知変位になる。したがって、無次元座標 ($\xi = x/a, \eta = y/b, W' = W/h$) を用いて表した変位関数は、一方向に固有関数を Fourier 展開し、他の方向に B-spline 関数を仮定すれば、それぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned}\theta_x(\xi, \eta) &= \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^{i_y} A_{mn} N_{n,k}(\eta) \cdot \bar{Y}_m(\xi) = \sum_{m=1}^r [N \bar{Y}_m(\xi) \{\delta_A\}_m] \\ \theta_y(\xi, \eta) &= \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^{i_y} B_{mn} N_{n,k}(\eta) \cdot Y_m(\xi) = \sum_{m=1}^r [N Y_m(\xi) \{\delta_B\}_m] \\ W'(\xi, \eta) &= \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^{i_y} C_{nm} N_{n,k}(\eta) \cdot Y_m(\xi) = \sum_{m=1}^r [N Y_m(\xi) \{\delta_C\}_m]\end{aligned}\quad (1)$$

$$\begin{aligned}\text{ここで、}[N] &= [N_{1,k}(\eta), N_{2,k}(\eta), \dots, N_{i_y,k}(\eta)]^T, \{\delta_A\}_m = \{A_{1m}, A_{2m}, \dots, A_{i_y,m}\}^T, \\ \{\delta_B\}_m &= \{B_{1m}, B_{2m}, \dots, B_{i_y,m}\}^T, \{\delta_C\}_m = \{C_{1m}, C_{2m}, \dots, C_{i_y,m}\}^T\end{aligned}\quad (2)$$

である。ただし、 $i_y = k-1 + M_y$ 、 $\bar{Y}_m(\xi)$ と $Y_m(\xi)$ は与えられた境界条件を満たした固有関数である。 $N_{n,k}(\eta)$ は正規化さ

B-spline 関数であり、 $k-1$ は Spline 次数、 M_y は y 軸方向の離散点の数である。また、 r は級数の項数を示す。

長方形 Mindlin 板のひずみエネルギー U は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}U &= (D/2)(a/b) \int_0^1 \int_0^1 \left\{ (b/a)^2 (\partial \theta_x / \partial \xi)^2 + (\partial \theta_y / \partial \eta)^2 + 2\nu(b/a) (\partial \theta_x / \partial \xi) (\partial \theta_y / \partial \eta) + 0.5(1-\nu) \{ (\partial \theta_x / \partial \eta) + (b/a) (\partial \theta_y / \partial \xi) \} \right. \\ &\quad \left. + 6(1-\nu) \kappa (b/h)^2 \{ (b/a) (\partial W' / \partial \xi) + \theta_x \}^2 + \{ (\partial W' / \partial \eta) + \theta_y \}^2 \right\} d\xi d\eta\end{aligned}\quad (3)$$

ここで、 D は板の曲げ剛性、 ν と κ は、それぞれポアソン比とせん断修正係数であらう。また、運動エネルギー T は、次式で与えられる。

$$T = (\rho h/2) \omega^2 ab^3 \int_0^1 \int_0^1 \left\{ W'^2 + (1/12)(h/b)^2 (\theta_x + \theta_y)^2 \right\} d\xi d\eta\quad (4)$$

ただし、 ρ は密度、 ω は円振動数(rad/sec)である。

$$\text{Mindlin 板の全ポテンシャルエネルギー } \Pi \text{ は、次式で与えられる。} \quad \Pi = U - T\quad (5)$$

したがって、式(1)を式(5)に代入して、極値化すれば、次式の代数方程式が求められる。

$$\delta \Pi = \delta(U - T) = [K] \{\Delta\} - n^* [M] \{\Delta\} = 0, \{\Delta\}^T = \{\{\delta_A\}_m, \{\delta_B\}_m, \{\delta_C\}_m\}\quad (6)$$

ここで、 $[K]$ と $[M]$ の行列の大きさは $3 \times (M_y + k - 2)$ であり、 $n^* = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D}$ は振動数パラメータである。

3. 数値計算例および考察

ここでは、平板の高次振動解析の収束性や解析精度について示す。ただし、 $\kappa = \pi^2/12$, $\nu = 0.3$ に仮定している。

表-1 には、相対する 2 辺が単純支持され、他の 2 つの辺が固定された正方形 Mindlin 板の振動数パラメータ

$n^* = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D}$ の収束性に与える離散点の数 My が示してある。ここで、 $b/h=1000$, My は 51 から 210 まで変化させ、また、 $k-1=5$ とする。これより、離散点の数を増大すると、高次の振動数パラメータが一定値への安定した収束状態を示している。また、図-2 には、1 万回までの振動数パラメータに与える spline 次数 $k-1$ の影響が示してある。ただし、離散点の数は 201 に仮定している。5 千回程度までは、さほど影響が見られないが、さらに高次のモード次数になると、差が現れてくる。

表-2 には、5 千回モードまでの振動数パラメータの精度比較が示してある。Levy 法を適用した薄板の高次振動の厳密解を基準にして、本手法 (SRM) と Zhao らの DSC 法³⁾を用いて得られた値の相対誤差も示してある。ただし、本手法では、 $k-1=5$, My=201 を採用し、また b/h を 1000 と 10000 に仮定している。また、図-3 は、上で述べた 2 つの解析法の相対誤差を示したものである。これより、本手法を用いれば、5 千回までの振動数パラメータの精度は、 $b/h=10000$ にすれば、誤差 0.1% 以内の高い精度が得られている。また、現在最も精度の高い解析結果が得られている DSC 法と比較しても、本手法の結果は、より高い精度を示している。

まとめ 本研究で得られた結果をまとめると、以下のとおりである。

1) 本手法を用いれば、高次の振動モード次数に対しても、精度の高い解析結果が得られる。2) spline 次数を高めると、同じ離散点の数であれば、精度の高い解析結果が、より高次の振動モード次数まで得られる。3) DSC 法の欠点である自由の境界条件は、本手法を用いれば容易に取り扱える。今後は、本手法を用いて、比較的板厚の大きな Mindlin 板の高次振動解析について検討を行い、高次振動の特性を明らかにしたい。

参考文献 1) Langley, R.S. and Bardell, N.S.: The Aeronautical Journal, pp. 287-297, 1998. 2) Zienkiewicz, O.C. IJNME, Vol. 47, pp. 9-28, 2000. 3) Zhao, Y.B. et al.: IJSS, Vol. 39, pp.65-88, 2002. 4) Mizusawa, T.: JSV, Vol. 163, pp.193-205, 1993.

表-1 正方形 Mindlin 板の高次振動数パラメータの収束性に与える離散点の数の影響 ;SS-CC, $b/h=1000$, $a/b=1.0$, $k-1=5$

My	50th (7.5)	100th (11.5)	500th (24.10)	1000th (23.28)	1500th (36.26)	2000th (51.6)
51	76.8668	147.949	679.823	1412.56	2319.57	3426.44
71	76.8668	147.949	678.735	1330.61	2006.26	2734.22
85	76.8668	147.949	678.734	1330.61	1986.35	2634.36
89	76.8668	147.949	678.734	1330.52	1982.71	2629.53
91	76.8668	147.949	678.734	1330.52	1981.12	2626.10
101	76.8668	147.949	678.734	1330.51	1978.99	2624.95
201	76.8668	147.949	678.734	1330.51	1978.98	2624.84

(mn) は、それぞれ x 方向、y 方向の半波長の数である。

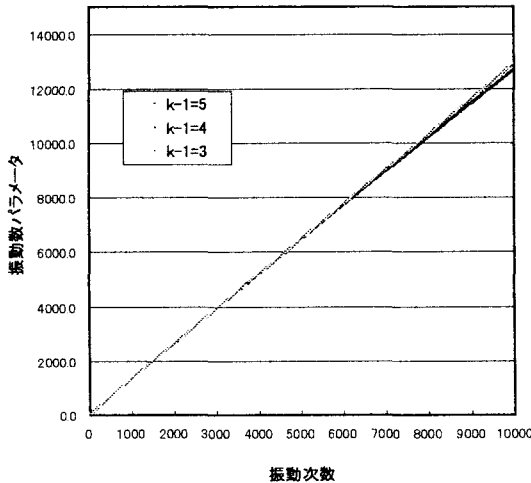


図-2 振動数パラメータに与える spline 次数 $k-1$ の影響 ;SS-CC, $b/h=1000$, $M=201$

表-2 正方形 Mindlin 板の高次振動数パラメータの精度比較 ;SS-CC, $a/b=1.0$, $M_y=201$, $k-1=5$

mode number	m	n	$b/h=10000$		$b/h=1000$		Exact values		$b/h=10000$		$b/h=1000$	
			SRM	SRM	SRM	SRM	Levy	DSCM	SRM(%)	SRM(%)	DSCM(%)	DSCM(%)
1	1	1	2.93331	2.93331	2.93330	2.93330	2.93330	2.93330	0.00	0.00	0.00	0.00
10	3	3	20.2450	20.2441	20.2450	20.2451	20.2451	20.2451	0.00	0.00	0.00	0.00
50	7	5	76.8785	76.8668	76.8786	76.8798	76.8798	76.8798	0.00	-0.02	0.00	0.00
100	11	5	147.991	147.949	147.991	147.993	147.993	147.993	0.00	-0.03	0.00	0.00
300	17	11	415.678	415.354	415.682	415.709	415.709	415.709	0.00	-0.08	0.01	0.01
500	24	10	679.584	678.734	679.593	679.631	679.631	679.631	0.00	-0.13	0.01	0.01
700	29	10	944.008	942.377	944.025	944.076	944.076	944.076	0.00	-0.17	0.01	0.01
1000	23	28	1333.83	1330.51	1333.87	1334.31	1334.31	1334.31	0.00	-0.25	0.03	0.03
1500	36	26	1986.23	1978.98	1986.31	1986.91	1986.91	1986.91	0.00	-0.37	0.03	0.03
2000	51	6	2637.51	2624.95	2637.64	2637.72	2637.72	2637.72	0.00	-0.48	0.00	0.00
2500	29	49	3282.93	3263.10	3283.09	3285.66	3285.66	3285.66	0.00	-0.61	0.08	0.08
3000	62	9	3925.89	3898.17	3926.18	3930.66	3930.66	3930.66	-0.01	-0.71	0.11	0.11
3500	61	29	4573.10	4533.47	4572.10	4585.86	4585.86	4585.86	0.02	-0.84	0.30	0.30
4000	72	6	5219.95	5170.98	5220.45	5245.00	5245.00	5245.00	-0.01	-0.95	0.47	0.47
4500	55	53	5868.24	5804.74	5867.87	5925.60	5925.60	5925.60	0.01	-1.08	0.98	0.98
5000	31	74	6512.10	6426.89	6504.22	6633.36	6633.36	6633.36	0.12	-1.19	1.99	1.99

SRM = spline-Ritz 法, DSCM = Discrete singular collocation 法³⁾, Levy = Levy 法

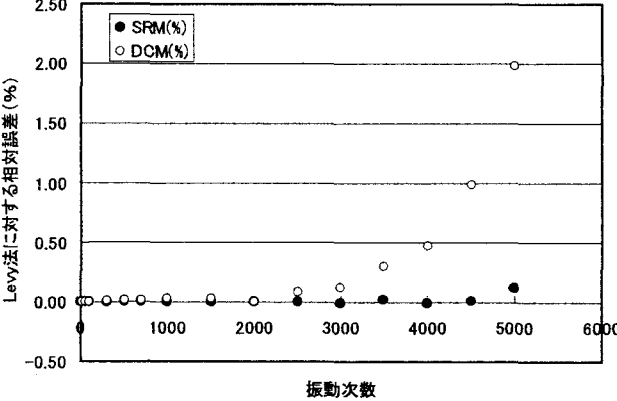


図-3 高次振動解析における Spline-Ritz 法 (SRM) と DCM の相対誤差の比較 : SS-CC, $a/b=1.0$, $b/h=10000$, $M_y=201$, $k-1=5$