

Spline 選点法を用いた扇形板の振動解析

大同工業大学大学院 学生員 ○後藤 大輔 大同工業大学 正員 水澤 富作

1. はじめに 橋梁スラブなどに用いられる扇形薄板の振動問題は、極座標で表した 4 階の微分方程式で与えられ、エネルギー関数（汎関数）を用いる Ritz 法・有限要素法や積分方程式に変換した境界要素法などを用いて解析されている¹⁾。一方、この微分方程式を直接近似的に解く解法として、差分法、DQ 法²⁾や選点法が適用されている。Lagrange 多項式のような全体関数を補間関数に用いた選点法や DQ 法では、多項式の次数の増大と共に、数値的に不安定な問題が生じてくることが知られている。また、非対称、密行列を扱う DQ 法の解は、離散点の配置に大きく依存するという問題がある。一方、後藤ら³⁾は、DQ 法や選点法で導かれる係数行列の非対称性を対称化するために、選点最小二乗法を適用した Mindlin 板の振動解析を行っているが、板厚の薄い問題に適用すると、不安定な収束性が示されている。

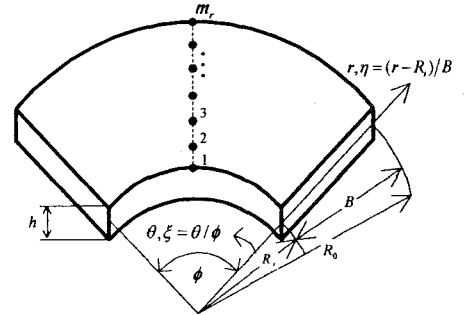


図-1 扇形板と極座標系

本研究では、区分的多項式である B-spline 関数を試験関数に適用した spline 選点法を用いた扇形板の振動解析を行い、本手法の収束性や解析精度について検討を行う。また、DQ 法の結果と比較し、本手法の数値安定性についても示す。

2. 式の定式化

2.1 spline 選点法 1次元の線形境界値問題は、微分演算子 L, B を用いて、次式で表される。

$$L(w) = q(r) \quad \text{領域}[R_i \leq r \leq R_o], \quad B(w) = g(r) \quad \text{境界}(r = R_i, r = R_o) \quad (1)$$

ここで、 w は変位であり、 $q(r), g(r)$ は与えられた関数である。したがって、領域残差 R_L と境界残差 R_B は、それぞれ次式で表される。

$$R_L = L(w) - q(r), \quad R_B = B(w) - g(r) \quad (2)$$

これらの残差を領域内の選点 (m_r 個) と境界点 (M 個) について求めると、次式で示される。

$$R_L(r_i) = L(w_i) - q(r_i); i = 1, 2, \dots, m_r, \quad R_B(r_{m_r+j}) = B(w_{m_r+j}) - g(r_{m_r+j}); j = 1, 2, \dots, M \quad (3)$$

$$\text{変位関数 } w \text{ は、B-spline 関数を用いて、次式で仮定する。} \quad w = \sum_{m=1}^{m_r+M} C_m N_{m,k}(r); i_r = m_r + k - 2 \quad (4)$$

ここで、 $N_{m,k}(r)$ は、正規化された B-spline 関数であり、 m_r と $k-1$ は、それぞれ区分点の数と spline 次数である。また、 C_m は、未定係数である。したがって、式 (4) を式 (3) に代入して、これをマトリックス表示すると、次式になる。

$$\{R\} = \{R_L\} + \{R_B\} = [Z]\{C\} - \{P\} = 0, \quad \{C\}^T = \{C_1, C_2, \dots, C_{m_r+M}\} \quad (5)$$

係数マトリックス $[Z]$ は、 $k-1$ を 3 次以降に仮定すると $m_r \times (m_r + M)$ の正方行列になる。 $q(r)$ を慣性項に置き換えれば、振動問題になる。

2.2 扇形板の支配方程式 図-1に示すように、半径方向の2つの直線辺が単純支持された扇形板の自由振動方程式は、Levy 法を用いると、常微分方程式に変換できる。ここで、式の定式化には、次式で示す無次元極座標系を用いる。

$$\xi = \theta / \phi, \eta = (r - R_i) / B \quad (6)$$

ただし、 $B = R_o(\lambda - 1)$ は板幅、 $\lambda = R_o / R_i$ は半径比、 ϕ は中心角、 r は半径であり、また R_i と R_o はそれぞれ扇形板の内径と外径を示す。一様厚さの扇形薄板の自由振動方程式は、

$$\frac{1}{r^4 \phi^4} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + \frac{2}{r B^3} \frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} + \frac{1}{B^4} \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} - \frac{2}{r B \phi^2} \frac{\partial^3 W}{\partial \eta \partial \xi^2} - \frac{1}{r B^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \frac{1}{r^3 B} \frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{2}{r B^2 \phi^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2 \partial \xi^2} + \frac{4}{r \phi^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = \frac{\rho h}{D} \omega^2 W \quad (7)$$

で表される。ここで、 $D = E h^3 / \{12(1 - \nu^2)\}$ である。半径方向の直線辺で相対する 2 辺を単純支持と仮定すると、たわみは、

$$W = \sum C_m N_{m,k}(\eta) \sin m \pi \xi = \sum [N]\{C\} \sin m \pi \xi; m = 1, 2, \dots, \infty \quad (8)$$

となり、 $[N] = [N_{1,k}(\eta), N_{2,k}(\eta), \dots, N_{m_r,k}(\eta)]$, $\{C\}^T = \{C_1, C_2, \dots, C_{m_r+M}\}$, $i_r = m_r + k - 2$ である。

したがって、式(8)を式(7)に代入すると、次式の常微分方程式が得られる。

$$\frac{1}{\Lambda^4} \frac{(m\pi)^4}{\phi^4} [N] \{C\} + \frac{2}{A} [N^{(3)}] \{C\} + [N^{(4)}] \{C\} + \frac{2}{A^3} \frac{(m\pi)^2}{\phi^2} [N^{(1)}] \{C\} - \frac{1}{A^2} [N^{(2)}] \{A\} + \frac{1}{A^3} [N^{(1)}] \{C\} - \frac{2}{A^2} \frac{(m\pi)^2}{\phi^2} [N^{(2)}] \{C\} - \frac{4(m\pi)^2}{R^4 \phi^2} [N] \{C\} = n^{*2} [N] \{C\} \quad (9)$$

ここで、 $A = \{\eta + 1/(\lambda - 1)\}$ 、 $n^{*2} = (\rho h \omega^2 B^4)/D$ 、 ρ は密度、 h は板厚、 ω は円振動数であり、 $[N'] = d^i[N]/d\eta^i$ である。

また、2つの円弧辺で与えられる境界条件は、それぞれ(a) 固定辺： $W=0, \partial W/\partial \eta=0$ 、(b) 単純支持辺： $W=0, M_\eta=0$ 、(c) 自由辺： $M_\eta=0, Q_\eta=0$ で与えられる。式(9)と境界条件式で表わされる連立微分方程式は、先に定式化した選点法を適用すれば、各離散点で内部残差と境界残差をそれぞれ零と置くことにより、固有方程式である代数方程式に変換できる。

3. 値計算例および考察 計算例として、相対する2つの円弧辺が任意の境界条件を持つ扇形板の振動解析を示す。表-1は、種々の境界条件を有する扇形板の振動数パラメータの収束性に与える離散点の数 m_r の影響が示してある。これより、離散点の数を増やすと一定値へ安定した収束性が得られている。また、表-2は、扇形板の振動数パラメータの精度比較を示している。ここで、半径比 $\lambda = R_o/R_i$ は2.0と4.0に仮定し、 m_r は151に仮定している。比較のために、Spline 帯板法による解⁴⁾とDQ法による結果²⁾も示してある。これより、本手法で求めた解は、境界条件や半径比に関係なく、他の数値解と非常に良く一致した結果を示している。次に、図-2には、2つの円弧辺が固定された扇形板の基本振動数パラメータ n^{*1} に与える中心角と半径比の影響が示してある。ここで、中心角を30°から270°まで変化をさせ、半径比は1.2、2.0、4.0としている。これより、中心角が90度以内になると、半径比の影響が大きく現れてくる。

4. あとがき 得られた結果をまとめると、次のようになる。(1) 本手法を用いれば、数値積分公式を用いずに連立微分方程式を解くことができる。(2) 離散点の数を増やすと、解の安定した収束状態が示され、またその収束値は、他の解析法による解と良く一致した結果を示している。(3) 中心角が90度以内になると、振動数パラメータに与える半径比の影響が大きく現れてくる。

参考文献 1) Kobayashi, et.al. : A survey of literatyre on bending, buckling and dynamics of sectorial plates. Mem. Fac. Eng, Osaka City Univ, Vol. 33, pp. 115-136, 1992. 2) 水澤, 近藤(田仲) : Differential Quadrature 法を用いた扇形 Mindlin 板の振動解析, 土木学会論文集, No. 661/I-53, pp. 221-230, 2000. 3) 後藤, 水澤 : Spline 選点最小二乗法を用いた Mindlin 板の振動解析, 土木学会年講, I-342, 2004. 4) Mizusawa, et.al. : Comput. Struct. Vol. 53, pp. 1205-1215, 1994.

表-1 扇形板の振動数パラメータの収束性に与える離散点の数の影響; $\phi=45^\circ, R_o/R_i=2.0, k=1=3$

		Modes				
B.C	m_r	1st	2nd	3rd	4th	5th
C-C	11	26.860	44.567	68.151	76.295	86.803
	21	26.885	44.674	67.571	76.425	86.681
	31	26.889	44.691	67.461	76.445	86.646
	41	26.890	44.697	67.423	76.452	86.633
	51	26.891	44.700	67.405	76.455	86.626
	101	26.892	44.703	67.381	76.460	86.618
S-S	151	26.892	44.704	67.376	76.460	86.617
	11	25.912	57.688	69.671	109.67	110.31
	21	25.872	57.293	69.615	107.52	109.88
	31	25.865	57.221	69.604	107.13	109.80
	41	25.862	57.196	69.601	106.99	109.77
	51	25.861	57.184	69.599	106.93	109.76
F-F	101	25.860	57.168	69.597	106.85	109.74
	151	25.859	57.165	69.597	106.83	109.74
C-C	11	5.2671	16.546	20.305	36.429	43.588
	21	5.2669	16.647	20.377	36.558	43.919
	31	5.2668	16.666	20.390	36.583	43.980
	41	5.2668	16.672	20.395	36.592	44.002
	51	5.2668	16.675	20.397	36.596	44.012
	101	5.2668	16.679	20.400	36.601	44.025
F-F	151	5.2668	16.680	20.400	36.602	44.027

表-2 扇形板の振動数パラメータの精度比較; $\phi=45^\circ$

			Modes				
B.C	R_0/R_i		1st	2nd	3rd	4th	5th
C-C	2		26.89	44.70	67.38	76.46	86.62
		DQM	26.89	44.70	67.37	76.46	86.62
		SSM	26.89	44.70	67.37	76.46	86.62
	4		40.21	84.79	94.64	146.7	158.8
		DQM	40.21	84.79	94.64	146.6	158.8
		SSM	40.21	84.79	94.64	146.6	158.8
S-F	2		5.697	20.45	23.70	44.03	46.94
		DQM	5.697	20.45	23.70	44.03	46.94
		SSM	5.697	20.45	23.70	44.03	46.94
	4		12.29	41.67	45.96	82.64	99.06
		DQM	12.29	41.67	45.96	82.63	99.07
		SSM	12.29	41.67	45.96	82.63	99.07
F-F	2		5.267	16.68	20.40	36.60	44.03
		DQM	5.267	16.68	20.40	36.61	44.03
		SSM	5.269	16.68	20.40	36.60	44.03
	4		12.27	41.10	45.96	78.36	99.06
		DQM	12.28	41.09	45.96	78.36	99.07
		SSM	12.27	41.10	45.96	78.36	99.07

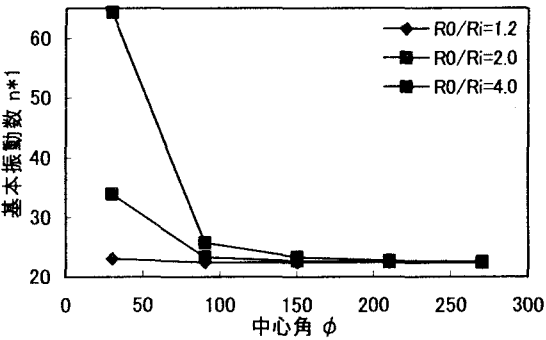


図-2 基本振動数に与える中心角と半径比の影響; $m_r=151$