

亀裂を含む長方形板の支持辺の様式と固有周期の関係の解析

名城大学 学生 松岡 功治 (株)安部工業所 正会員 國富 康志
 名城大学 学生員 土山 正登 名城大学 正会員 中川 建治

1 解析対象

亀裂を含む平板や壁体の振動あるいは音響問題の基礎的な研究として、直線状の亀裂1本(支持線平行で偏在可能)を持つ長方形板の曲げ振動解析を報告する。このような研究は既に報告されている¹⁾が、発表者らの研究²⁾は亀裂先端に process zone を構成したもので、異なる解析法に基づくものである。

基礎式は薄板の曲げ振動として最も基礎的な式(1)に基づくものとして、亀裂の長さや中心位置と自由振動の固有周期との関係を研究する。解は $x < 0$ 部の解 $w_1(x, y, t)$ と $x > 0$ 部の $w_2(x, y, t)$ とする。

$$m \frac{\partial^2 w_j}{\partial t^2} + D \nabla^2 \nabla^2 w_j(x, y, t) = 0 \quad \dots (1)$$

長方形板は x 軸に平行な相対2辺 ($y=0, y=L_y$) では単純支持として、 y 軸に平行な2辺 ($x=-L_{x1}, x=L_{x2}$) は固定支持・単純支持・及び自由辺の3様式を設定する。亀裂は図1に示すように y 軸上にあり、完全開口部($M_x=R_x=0$)の長さは $2a$ 、Process zone 相当部が両先端に長さ b として(この点が本研究の特徴である)設けられている。自由振動であるから解は次の形とする。

$$\begin{cases} w_j = e^{i\omega t} \sum_k X_{jk}(x) \sin\left(\frac{k\pi y}{L_y}\right) \\ X_{jk}(x) = \text{指数関数 (割愛)} \end{cases} \quad \dots (2)$$

2 開口の構成

Process zone を含めた開口部(変位不連続部)の形状 $g(\xi)$ は式(3)と図2に示すように区間 $2(a+b)$ 長を半周期とするフーリエ sin 級数 N_c 項で表せるものと仮定し、その係数(未定係数)を μ_k とする ($2(a+b)$ 区間のみを展開の有効区間として採用する)。

$$g(\xi) = \sum \mu_k g_k = \sum_{k=1}^{N_c} \mu_k \sin \frac{k\pi}{(a+b)} \eta \quad \dots (3)$$

解析では $N_c \doteq 40$ 程度にしている。

次に開口を表す基本関数 g_k の両側に値0とする区間を付加して板のスパン L_y に亘る関数 $h_k(y)$ を定義して、これをフーリエ sin 級数 ($N_s \doteq 140$) に再展開する。しかしこれについては既に参考文献²⁾に報告しているので割愛する。

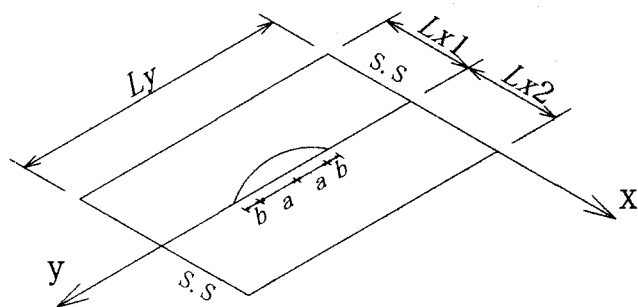


図1 解析対象とする平板と亀裂

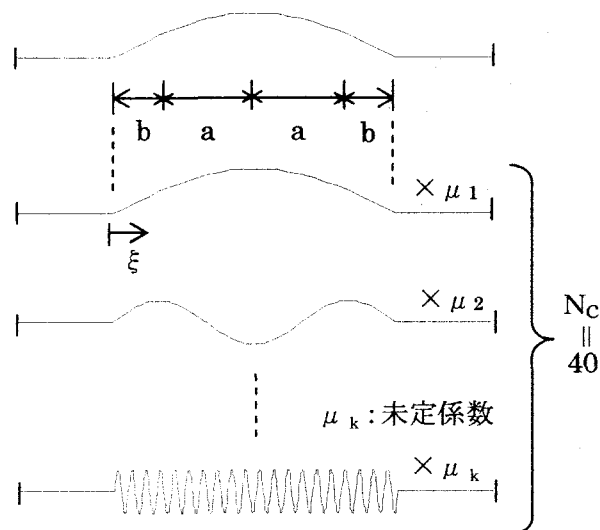


図2 亀裂開口部の形状

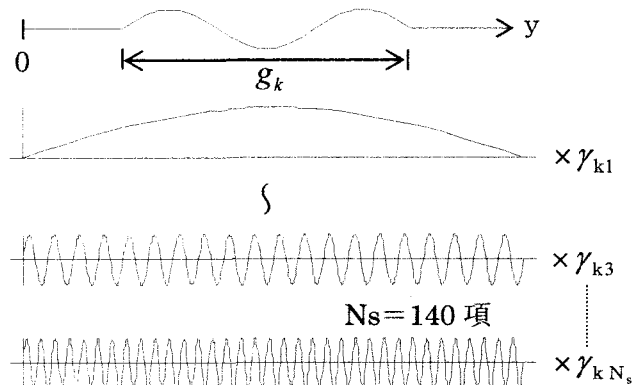


図3 板の長さ方向に関する形状

3 開口部の境界条件の導入法

y 軸に平行な支持辺の条件（固定・単純・自由）は満足しつつ、亀裂の開口を持つ y 軸上では式(3) のたわみ方向の sine 級数開口（あるいはたわみ角 W_x 方向の sine 級数開口）を生じさせつつたわみ角（たわみ）と断面力は完全に連続するたわみ解を理論的に導き得た（mathematica で確認）。

これらの理論解を基に式(5)に示すように完全開口部の断面力 M_x 及び R_x の二乗積分値（完全開口部（ $\eta_c - a < y < \eta_c + a$ ）のみで積分）が最小になるように条件を設定する最小二乗法を活用する。

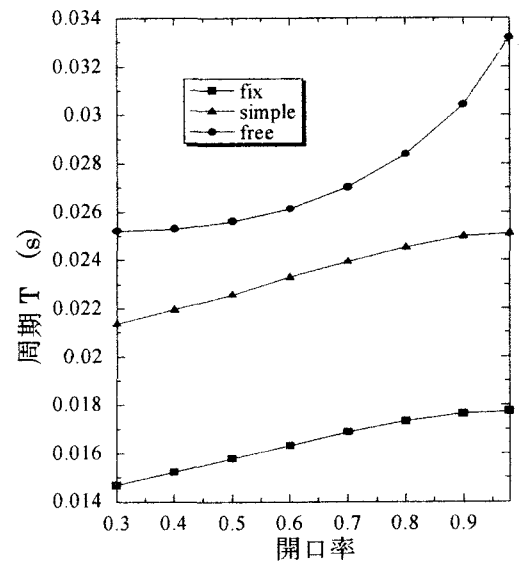
$$\left[\int_{\eta_c-a}^{\eta_c+a} R_x^2 dx + \int_{\eta_c-a}^{\eta_c+a} M_y^2 dy \right]_{\min} \dots (5)$$

たわみ w_1, w_2 は解析的に導いたものを用いるが、式(5)の最小二乗法による 80 元の行列の行列式を 0 にするような固有値を繰り返し計算で導くことになる。なお、Process zone 相当部に拘束は設けない。

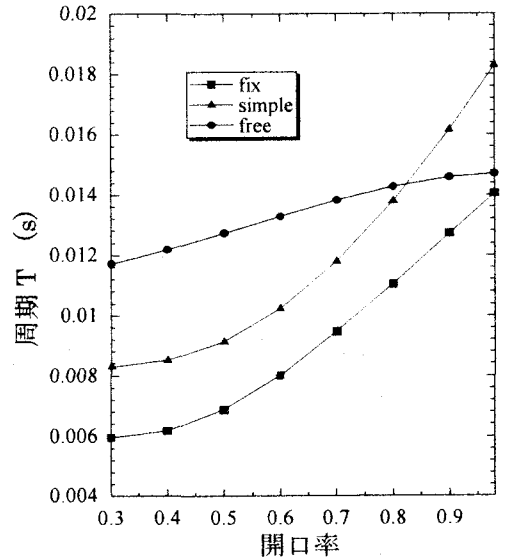
4 結果

1 辺が 100cm で厚さ 1 cm の正方形板の中心に、実開口部長さ：2a=30cm プロセスゾーン長さ b=5cm の直線状亀裂 1 本を持つ場合の固有周期の結果を図 4 に示す。図 4, 5 には中心に亀裂を持つ板で、相対 2 辺が固定の場合と単純支持の場合の $w(xy)$ の見取り図と水平に y 軸方向へ眺める図を示す。
ここで開口率：2(a+b)/Ly 実開口率：2a/Ly とする。

参考文献；1) R. Solecki: Bending Vibration of a Simply Supported Rectangular Plate with a Crack Parallel to One Edge, E.F.M.Vol.18,No.6,pp.111-2228.
2)土山,国富,中川,藤井;亀裂を含む長方形板の自由振動解析,H15・土木学会中部・概要集 I-51.



(a)対称モード



(b)逆対称モード

図 4 実開口率変化と周期の関係

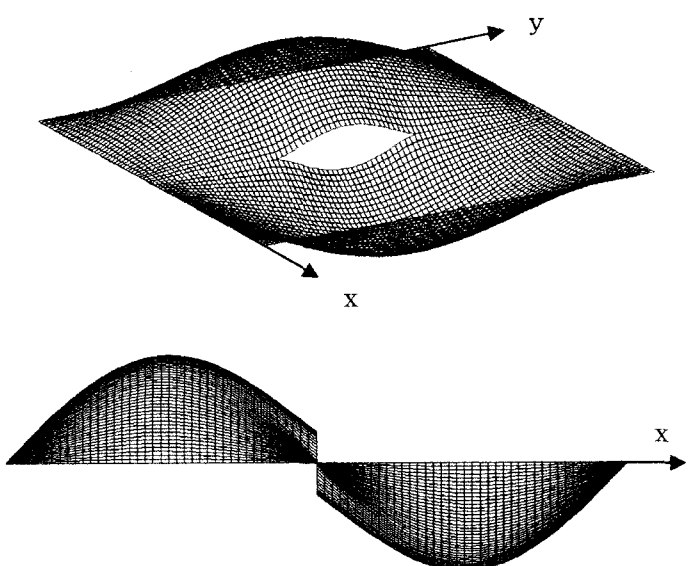


図 5-1 周辺単純支持

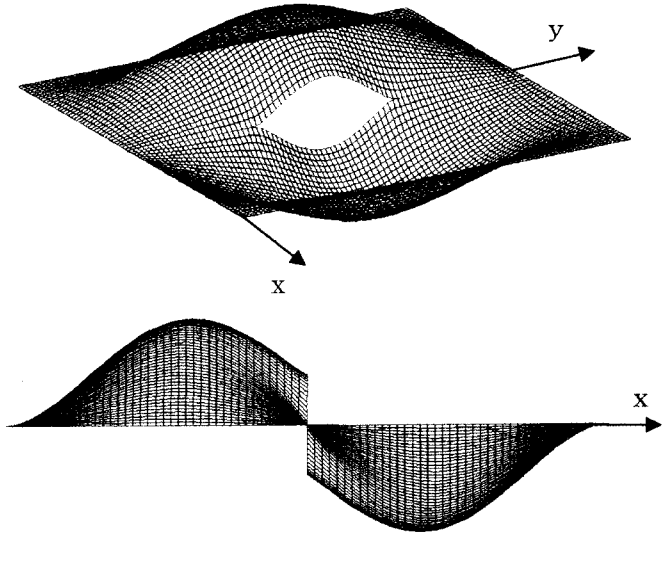


図 5-2 相対二辺単純他二辺固定支持