

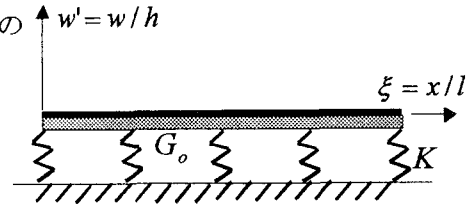
Pasternak 基礎上の Timoshenko ばりの振動および座屈解析

大同工業大学 正員 ○水澤富作

大同工業大学 村井昇平 同 山本省吾

1. はじめに 地中ばりや海底パイプラインなどは、弾性基礎上のはり問題として解析されている。Pasternak 基礎モデル¹⁾は、互に独立した Winkler バネと梁の間にせん断層を設けた修正 Winkler 基礎モデルとして知られており、また Pasternak 基礎上の Euler ばりの振動や座屈問題²⁾は、古くから種々の解析手法を用いて検討されている。梁高さが梁長さと比較して大きくなると、横せん断変形や回転慣性の影響を考慮した弾性基礎上の Timoshenko ばりが解析の対象になるが、この種の梁の振動や座屈解析は、あまり検討されていないように思われる。

本研究では、spline-Ritz 法を用いて、Pasternak 基礎上の Timoshenko ばりの振動や座屈解析を行い、本解析法の収束性や解析精度について検討を行っている。また、Pasternak 基礎上の Timoshenko ばりの振動特性や座屈特性に与える l/h や 2 つの地盤係数パラメータ ($\alpha = Kl^4/EI, \beta = G_0 l^2/EI$) の影響などについて明らかにしている。



図・1 Pasternak 基礎上のはり

2. 解析手法 Pasternak 基礎は、図-1 に示すように互に独立した Winkler バネとはりの間にはり軸方向のせん断変形のみ抵抗するせん断層を導入して、Winkler バネの連成を簡易的に考慮した地盤モデルである。横せん断変形や回転慣性の影響を考慮した Pasternak 基礎の Timoshenko ばりの変位関数は、独立した 2 つのたわみ W と回転角 ϕ で定義され、B-spline 関数を用いて次式で仮定する。

$$w = \sum A_m N_{m,k}(x), \phi = \sum B_{m,k}(x), m = 1, 2, \dots, i_x \quad (1)$$

ここで、 $N_{m,k}(x)$ は正規化された B-spline 関数であり、 A_m, B_m は、それぞれ未定係数である。また、 $i_x = M + k - 2$ 、 M は離散点の数、 $k-1$ は spline 次数である。

軸圧縮力 P を受ける Pasternak 基礎の Timoshenko ばりのひずみエネルギー U 、軸圧縮力 P の外力ポテンシャル V と運動エネルギー T は、それぞれ無次元座標 ($\xi = x/l, w' = w/h$) を用いて、次式で与えられる。

$$U = \frac{EI}{2l} \int_0^1 \left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)^2 d\xi + \frac{\kappa GA l}{2} \int_0^1 \left\{ \phi - \left(\frac{h}{l}\right) \frac{dw'}{d\xi} \right\}^2 d\xi + \frac{Kh^2 l}{2} \int_0^1 w'^2 d\xi + \frac{G_0}{2} \left(\frac{h^2}{l}\right) \int_0^1 \left(\frac{dw'}{d\xi}\right)^2 d\xi \quad (2)$$

$$V = \frac{Ph^2}{2l} \int_0^1 \left(\frac{dw'}{d\xi}\right)^2 d\xi \quad (3), \quad T = \frac{\rho A \omega^2 h^2 l}{2} \int_0^1 \left(w'^2 + \frac{1}{12} \phi^2 \right) d\xi \quad (4)$$

ここで、 EI, l, h は、それぞれ曲げ剛性、スパン、はり高さであり、 G, A, ρ はせん断弾性係数、断面積、密度である。 κ, ω は、それぞれ修正せん断係数と円振動数である。また、 K, G_0 は Winkler バネ定数とせん断層のせん断弾性係数である。等方性な Timoshenko ばりの全ポテンシャルエネルギー Π は、次式で表される。

$$\begin{aligned} \Pi = U + V - T = & \frac{EI}{2l} \left(\frac{h}{l}\right)^2 \left[\left(\frac{l}{h}\right)^2 \int_0^1 \left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)^2 d\xi + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \left(\frac{l}{r}\right)^2 \left(\frac{l}{h}\right)^2 \int_0^1 \left\{ \phi - \left(\frac{l}{h}\right) \frac{dw'}{d\xi} \right\}^2 d\xi + \frac{Kl^4}{EI} \int_0^1 w'^2 d\xi \right. \\ & \left. + \frac{G_0 l^2}{EI} \int_0^1 \left(\frac{dw'}{d\xi}\right)^2 d\xi + \frac{P_\sigma l^2}{EI} \int_0^1 \left(\frac{dw'}{d\xi}\right)^2 d\xi - \omega^2 l^4 \frac{\rho A}{EI} \int_0^1 \left(w'^2 + \frac{1}{12} \phi^2 \right) d\xi \right] \quad (5) \end{aligned}$$

ただし、 ν, r は、それぞれポアソン比と回転二次半径であり、また P_σ は弾性座屈荷重である。

式(5)に、式(1)を代入し、それぞれ $\{A_m\}$ と $\{B_m\}$ で偏微分すれば、次式の代数方程式が導ける。

$$\delta \Pi = [K]\{\Delta\} + \lambda[G]\{\Lambda\} - n^*[M]\{\Delta\} = 0 \quad (6)$$

ただし、 $[K], [G], [M]$ は、それぞれ剛性マトリックス、幾何剛性マトリックスと質量マトリックスである。 $\{\Delta\}^T = \{\{A_m\}, \{B_m\}\}$ であり、また $\lambda = P_\sigma l^2 / EI, n^* = \omega^2 \sqrt{\rho A / EI}$ は、それぞれ座屈荷重パラメータと振動数パラメータである。また、はりの両端で与えられる境界条件は、仮想バネ法を用いて導入している。

したがって、式(6)で表される特性方程式の固有値解析を行えば、固有値と固有モードが求められる。

3. 数値計算例および考察 ここでは、spline-Ritz法を用いた弾性基礎上のTimoshenkoばりの振動解析と座屈解析を行い、振動特性および座屈特性に与える弾性基礎モデルの相違、地盤係数パラメータと l/h の影響について示す。ただし、断面は高さ h の長方形であり、また κ は $5/6$ 、 $k-1=4$ 、 $\nu=0.3$ と仮定する。

3.1 振動特性

表1には、両端固定されたPasternak基礎上のTimoshenkoばりの振動数パラメータの収束性に与える離散点の数 M の影響が示してある。ただし、 $L/h=1000$ に仮定し、また度比較のために、 $\alpha=\beta=0$ の解も示してある。これより、離散点の数を増大すると、一定値に向かう安定した収束性が得られており、また解析解とも一致した結果が得られている。図-2には、両端固定された弾性基礎上のTimoshenkoばりの基本振動数パラメータ $n=1$ に与える弾性基礎モデルと h/L の影響が示してある。これより、 h/L が大きくなると、せん断変形の影響が現れてくるので、 $n=1$ が減少してくる。また、Winkler基礎モデル($\alpha=5, \beta=0$)とPasternak基礎モデル($\alpha=5, \beta=1$)を比較すると、Pasternak基礎モデルの値は、Winkler基礎モデルの値より大きな値を示す。数値計算結果より、振動数パラメータに対して、 α の影響は直線的になるが、 β の影響は、値の増大と共に、曲線を描くことが示されている。

表-1 Pasternak基礎上の両端固定Timoshenkoばりの振動数パラメータの収束性に与える離散点の数の影響： $L/h=1000, k-1=5$

α	β	M	Mode				
			1st	2nd	3rd	4th	5th
0	0	11	22.376	61.930	125.35	236.96	509.21
		15	22.373	61.688	121.24	203.17	318.25
		21	22.373	61.673	120.92	200.00	299.47
		27	22.373	61.672	120.90	199.87	298.63
		33	22.373	61.672	120.90	199.85	298.55
		Exact	22.373	61.673	120.90	199.86	298.56
5	1	11	22.759	62.337	125.75	237.31	509.45
		15	22.757	62.100	121.66	203.59	318.66
		21	22.756	62.085	121.34	200.44	299.92
		27	22.756	62.084	121.33	200.31	299.08
		33	22.756	62.084	121.33	200.29	299.00

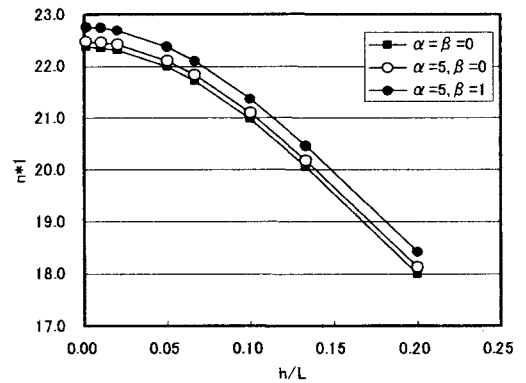


図-2 Timoshenkoばりの基本振動数パラメータ $n=1$ に与える弾性基礎モデルの影響： $M=33, k-1=5$

3.2 座屈特性

表2には、 $\alpha=\beta=0$ に仮定して求めた座屈荷重パラメータに与える h/L と境界条件の影響が示してある。これより、 h/L が大きくなると、横せん断変形の影響により値が減少し、拘束が大きいほど、低下が大きい。また、 $h/L=0.001$ の解は、Eulerばりの厳密解と完全に一致している。

表-2 Timoshenkoばりの座屈荷重パラメータに与える L/h と境界条件の影響： $M=33, \alpha=\beta=0, k-1=5$

L/h	h/L	C-C	C-S	S-S	C-F
1000	0.001	39.478	20.191	9.8696	2.4674
	Exact	39.478	20.191	9.8696	2.4674
100	0.01	39.438	20.179	9.8671	2.4672
50	0.02	39.317	20.144	9.8595	2.4668
20	0.05	38.491	19.904	9.8067	2.4635
10	0.1	35.803	19.089	9.6227	2.4517
5	0.2	27.987	16.406	8.9509	2.4057

図-2には、両端単純支持されたPasternak基礎上のTimoshenkoばりの座屈荷重パラメータ λ に与える h/L と β の影響が示してある。ただし、 $\alpha=2$ と仮定している。これより、 β が増大すると、座屈荷重パラメータも増大し、また h/L が大きくなると、横せん断変形の影響により、 λ が減少してくる。

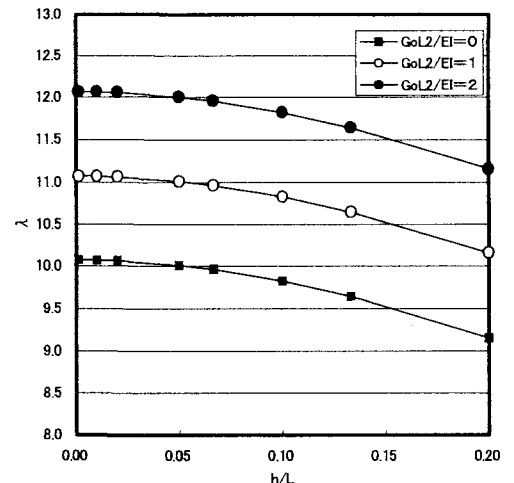


図-2 Timoshenkoばりの座屈荷重パラメータに与える $\beta = G_0 l^2 / EI$ の影響： $M=33, \alpha=2.0, k-1=5$

4. まとめ 得られた結果をまとめると、以下のようになる。

- ① spline-Ritz法を適用すると、安定した収束性と精度が得られる。
- ② Pasternak基礎上のばりの振動数パラメータと座屈荷重パラメータは、 $\alpha = KI^4 / EI$ と比例関係にあるが、 $\beta = G_0 l^2 / EI$ とは、曲線関係になる。
- ③ Winkler基礎モデルは、Pasternak基礎モデルと比較して、ばりの剛性を低めに評価する。
- ④ 振動数パラメータと座屈荷重パラメータは、 h/L の増大と共に、減少してくる。

参考文献 1) Pasternak, P.L.: Gosud. Izdat. Literaturi po Stroit. I Arhitekture, Moscow, 1954. 2) 白木他: Pasternak基礎上の温度勾配を持つ変断面片持ちばりの動的安定性、土木学会年講、pp. 994-995, 1991. 3) Mizusawa, T. et al.: JSV, Vol.62, pp 301-308, 1979.