

軟化材料から構成される Shanley Column の安定性

名古屋大学

池本成仁

名古屋大学大学院 正会員 伊藤 睦

名古屋大学大学院 正会員 田辺忠顕

1. はじめに

非弾性材料で構成される構造の安定性や釣合経路の安定性に関する議論は, Shanley Column¹⁾に見られるように, 従来, 非弾性の硬化材料に対して議論がなされており, ひずみ軟化材料を仮定した構造の安定性に関する知見が不十分であるのが現状である. そこで本研究は, コンクリートのようなひずみ軟化材料を Shanley Column に適用した場合にも, 硬化材料で構成される Shanley Column と同様な議論が成立するか否かを, 固有値解析と釣合経路の 2 次仕事の評価を通じて検討を行った.

2. Shanley Column の概要

Shanley Column の概要を図-1 に示す. Shanley Column は, 2 つの剛棒が図-2 に示すような弾塑性の微小なヒンジによって接合されている. 図-3 に示すように仮定したヒンジの応力-ひずみ関係において応力状態が loading 時の勾配を E_l , unloading 時の勾配を E_u とし, 右側に座屈を想定した場合, 左, 右側の応力-ひずみ関係の接線勾配をそれぞれ $E_1 = \eta E_l$, $E_2 = \eta \xi E_l$ とする. $X = \delta q_1 / l$, $Y = \delta q_2 / 2h$, $\xi_u = E_u / E_l$ とおくと, ヒンジの状態は式(1)のように表される. ここで δ は微小を意味する.

$$\begin{aligned} Y > X & \quad (\text{loading-loading}) & \xi &= 1 & \eta &= 1 \\ -X \leq Y \leq X & \quad (\text{loading-unloading}) & \xi &= \xi_u & \eta &= 1 \\ Y < -X & \quad (\text{unloading-unloading}) & \xi &= 1 & \eta &= \xi_u \end{aligned} \quad (1)$$

また軸力とモーメントの釣合からこの系の剛性方程式は次式のよ
うに導かれる.

$$\begin{Bmatrix} l \delta f_1 \\ 2h \delta f_2 \end{Bmatrix} = 2\eta P_l l \begin{bmatrix} 1 + \xi - \frac{2P_0}{\eta P_l} & 1 - \xi \\ 1 - \xi & 1 + \xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \quad (2)$$

ここで $P_l = E_l A h / l$ であり, A はヒンジの断面積である. 式(2)の行列式からもわかるように, 硬化材料を仮定した時, $P_0 = P_l$ かつヒンジ両側が loading 状態の時に系が不安定となる. この時, $\delta f_1 = 0$ とすると, $(q_1 = 0, \xi = \eta = 1)$ 状態の経路 1 と $(q_1 > 0, \xi = \xi_u, \eta = 1)$ 状態の経路 2 の 2 つの経路が想定される.

3. 釣合点での固有値解析と経路上の 2 次仕事量の評価

硬化材料について考える場合, unloading 時の勾配 E_u を, 弾性勾配とほぼ等しいと仮定すると, $\xi_u > 1$ である. その一方で, 軟化材料を仮定した場合, 軟化域では, $E_l < 0$ となり, $\xi_u < 0$ となる. 式(1)の分類に従って, ヒンジの左右の状態が loading-loading,

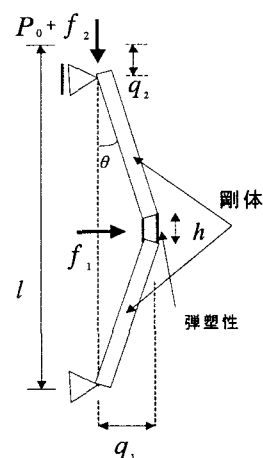


図-1 Shanley Column

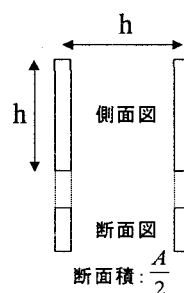


図-2 ヒンジの諸元

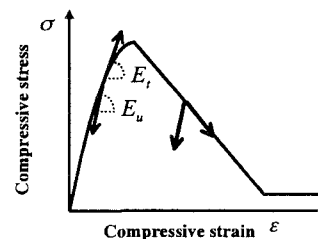


図-3 ヒンジ応力-ひずみ関係

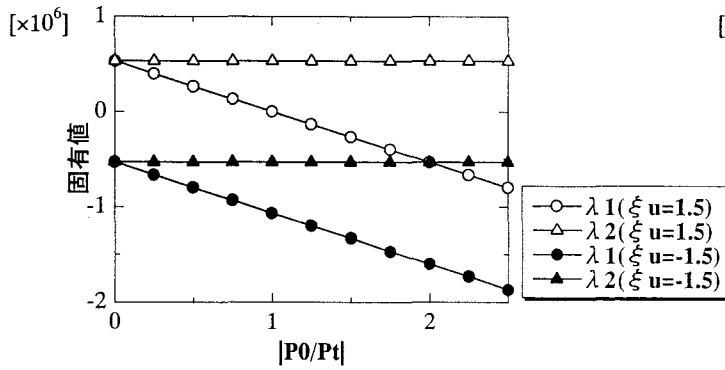


図-4 loading-loading時の固有値

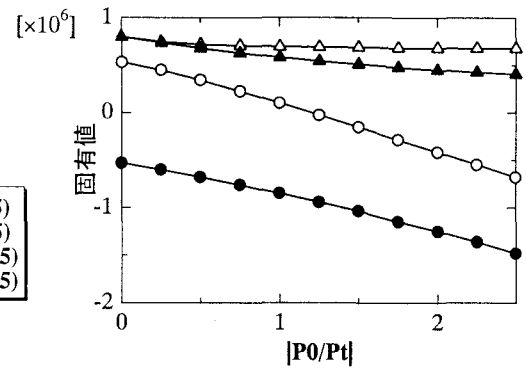


図-5 loading-unloading時の固有値

loading-unloading の場合について P_0/P_t の値を変化させ、式(2)の剛性マトリクスの固有値解析を行った。その結果を、図-4、図-5 に示す。2つの固有値を $\lambda_1 < \lambda_2$ とすると、荷重が増加する場合 ($\xi_u > 0$) は、常に $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ であり、 $\lambda_1 \leq 0$ は分岐を示す。一方、荷重が減少する場合 ($\xi_u < 0$) は、常に $\lambda_1 < 0$ であり、 $\lambda_2 \leq 0$ は分岐を示す。これらの結果から荷重-変位関係、系の状態、及び固有値の符号を図-6 に示す。

Shanley-Column の釣合経路の安定性は、2次仕事 $\delta^2 W = 1/2 \delta f_2 \delta q_2$ を求めることにより評価できる。

$$\delta^2 W^{(1)} = 1/2 \delta f_2^{(1)} \delta q_2^{(1)} \quad (3)$$

$$\delta^2 W^{(2)} = 1/2 \delta f_2^{(2)} \delta q_2^{(2)} \quad (4)$$

ここで上付き数字は経路を意味する。安定経路は、エントロピーを最大にする経路である。つまり、安定経路は、 $\delta^2 W$ が最小のものである。経路1と経路2について $\delta^2 W$ を計算し比較したものを図-7 に示す。この結果、硬化材料を仮定した場合、 $P_0/P_t > 1$ で、 $\delta^2 W^{(2)} < \delta^2 W^{(1)}$ である。また、軟化材料を仮定した場合にも、 $|P_0/P_t| < 1$ で、 $\delta^2 W^{(2)} < \delta^2 W^{(1)}$ となる。即ち、上記の固有値解析も合わせて考えれば、硬化材料を仮定した場合には、 $P_0/P_t = 1$ で分岐が生じ、分岐点からの安定経路は、経路2である。また、軟化材料を仮定した場合にも、応力状態が軟化域に到達する $|P_0/P_t| < 1$ で分岐が生じ、分岐後の安定経路は、経路2となる。

4. まとめ

本研究の範囲内における検討では、硬化材料、軟化材料の区分に拘わらず、経路2が理論的に安定経路となる。今後は更なる検討と、分岐解析により釣合経路を評価する予定である。

参考文献

1) Z.P. Bazant, L. Cedolin : Stability of Structures, Oxford University Press, 1991

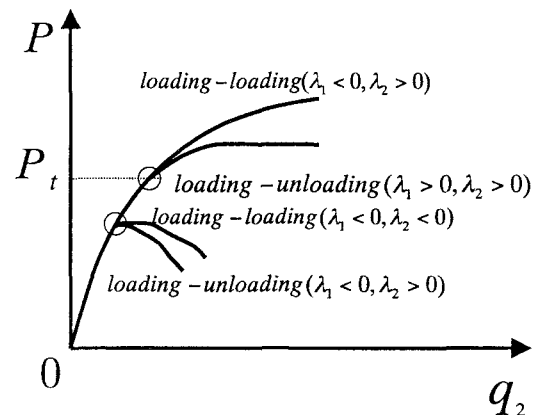


図-6 分岐図

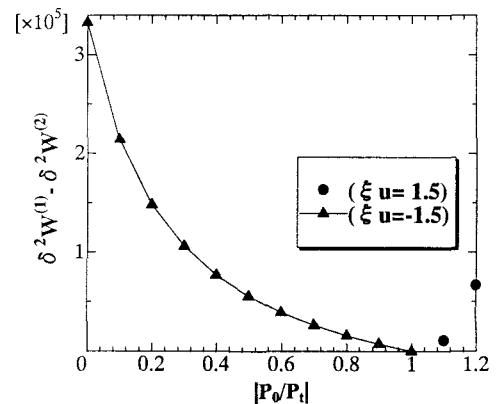


図-7 経路1と経路2の2次仕事の比較