境界要素自動生成のための曲面上のバブルメッシュ法の開発

福井大学大学院　学生会員　○　上田 哲也
福井大学工学部　正会員　　　福井 卓雄

1　はじめに

本研究は、大規模境界要素解析を目標とした、境界要素自動生成手法の開発を目的としたものである。著者らは、すでに、陰関数で表される一般の曲面上において境界要素を自動生成する方法を提案し、球面でその有効性を確認した [1]。本研究では、場所により曲率の変化する一般の曲面にこれを適用する。とくに、任意曲面上のバブルメッシュ法について考察する。

2　境界要素の自動生成手法

著者らの提案する境界要素の自動生成手法 [1] の手順は以下のとおりである。

1. 確率微分方程式を使って、曲面上に必要個数のサンプリング点をとる。
2. 得られたサンプリング点の集合を 8 分木によって構造化する。境界要素の生成は、8 分木を葉から根に向けてたどることにより実行する。すなわち、部分的な境界分割をつなぎあわせて全曲面の分割を作成する。
3. 葉のセルに含まれるサンプリング点の図心と平均法線方向からセルに含まれる曲面の近似平面を作成する。この近似平面は、次のステップで用いられる Delaunay 三角形分割に利用される。
4. バブルメッシュ法により、セル内の曲面上の点の分布を均質化する。バブル法の詳細については、後に述べる。
5. 木を上昇し、隣接するセルに含まれる曲面の分割を接合する。なめらかな接合を得るためには、セル内の曲面上の点の分布が十分に均質化されていることが必要である。
6. 木を上昇して根に至れば、全曲面の分割が終了する。

全曲面の分割がうまくいくためには、セルに含まれる曲面の部分分割の接合がうまくできなければならない。これには、曲面上のサンプリング点が均質に分布していることが重要である。したがって、この手法の中でバブルメッシュ法のはたす役割は大きい。

3　バブルメッシュ法

3.1　基礎的な考え方

バブルメッシュ法は分子動力学的な方法により領域内に球 (バブル) を最密充填し、次にこれらのバブルの中心点を Delaunay 三角形で結ぶことで均質なメッシュを得る方法である。

最密充填を得るためには、バブル半径 r_0 を決定すること、および、バブルを適切に移動させて、最密充填位置に落ち着かせることが必要である。有限の領域内に与えられた数のバブルが存在する場合には、バブル半径はその数のバブルで領域が丁度満たされるように決定する。実行上は、最適半径よりも少し大きめの半径を設定する法が、移動計算の収束が早いようである。最適位置へのバブルの移動は、次の運動方程式を満足させるように行う。

$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}(t)}{dt^2} + c\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{f}(t) \quad (t>0) \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0, \quad \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = 0 \quad (t=0) \tag{1}$$

ここで、m は質量、c は粘性抵抗、$f(t)$ はバブル間力である。バブル間力の絶対値は、

$$f(w) = aw^3 - bw^2 + cw + d, \qquad f(1) = f(1.5) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'(1) = -k_0/r_0 \tag{2}$$

で定める。ここで w は (バブル間距離 r) ／ (安定距離 r_0) を表す。すなわち、バブル間距離が丁度 r_0 になるときに、作用する力が 0 となる。

3.2 曲面上のバブルメッシュ法

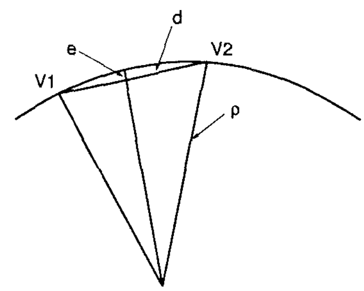
曲面上のバブルメッシュ法においては、バブル半径 r_0 を決定する場合に曲面の曲率を考慮しなければならない。図–1 は、曲線上のバブル半径と曲率半径の関係を示したものである。

図より、曲率半径を ρ、曲線上の二点を結ぶ線分と曲線との距離を e とすると、バブル半径は

$$r_0 = \sqrt{2e\rho - e^2} \tag{3}$$

で与えられる。有限領域におかれた点の数があらかじめ決まっているときには、最密性から r_0 の平均値がきまるので、平均曲率を使って、上式から e を決め、それぞれの点の局所的な曲率から、(3) によりその点におけるバブル半径 r_0 を決めることになる。

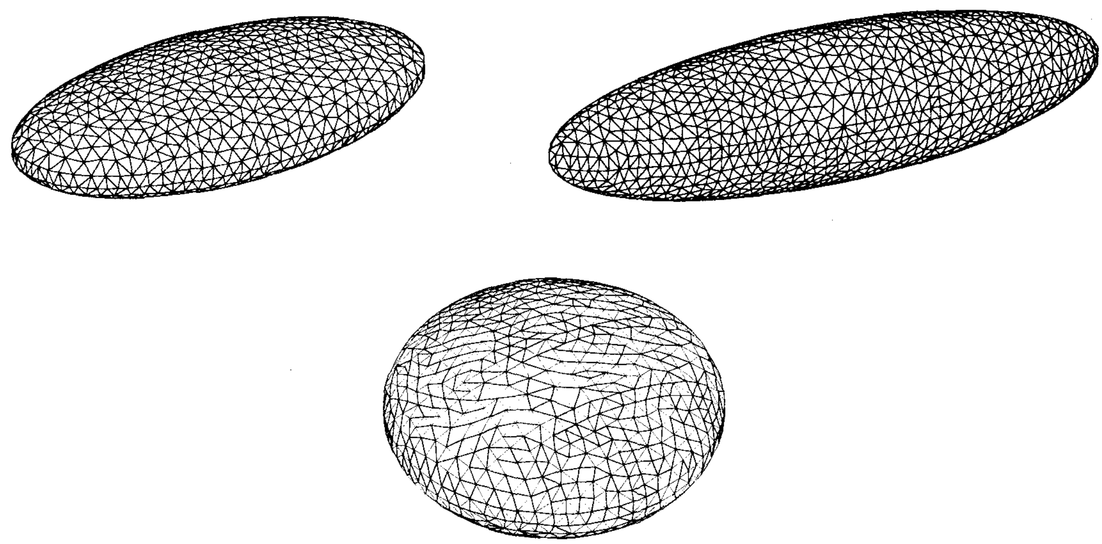
曲面上の点を扱う場合には、運動方程式 (1) に付加条件 $F(x) = 0$ が加わる。すなわち、点は常に曲面上に存在しなければならない。運動方程式 (1) は逐次的に解くので、新しい位置を決定する場合には、変位の接平面上の射影をとり、その点を Newton 法により曲面に垂直に曲面に近づける操作を実行している。



図–1 曲率半径とバブルの半径の関係

4 曲面分割の例

この方法で楕円体面を分割した例を図–2 に示す。下側の図は 1 : 4 の偏平な回転楕円体である。いずれの場合も、比較的均質な要素分割が得られている。



図–2 回転楕円体の要素分割：接点数 1000、要素数 1996

5 おわりに

今回、曲率の変化する物体の境界要素を自動生成することができた。今後の課題として 8 分木で構造化したとき近似平面がセルに 2 面できる可能性のあるトーラス面の境界要素の自動生成が挙げられる。また 3 次元のバブルメッシュ法の適用も検討する。

参考文献

[1] 福井卓雄：確率的サンプリング法を利用した任意曲面の境界要素モデル作成手法: 計算数理工学コンファレンス論文集 Vol.3, 2003.

[2] Kenji Shimada, David C. Gossard : Automatic Triangular Mesh Generation of Trimmed Parametric Surfaces for Finite Element Analysis: *Computer Aided Geometric Design*, Vol.15,No.3,pp. 199–222, 1998.