2次元異方性静弾性問題における高速多重極境界要素法の定式化について

福井大学工学部　学生会員　○　小林 孝彰
福井大学工学部　正会員　　　福井 卓雄

2次元直交異方性体の静弾性問題における高速多重極境界要素法の定式化を行う。ここでは、異方性弾性問題の Airy の応力関数について整理し、基本解の複素関数表現を与えて、多重極展開および局所展開に関する関係式を導いた。

1　直交異方性弾性体の2次元理論

(1)　基礎式

直交異方性弾性体の静的問題における、ひずみ–変位関係、つり合い方程式、構成関係は次のようになる。

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \qquad \sigma_{ij,j} + X_i = 0, \qquad \epsilon_{ij} = s_{ij}^{kl}\sigma_{kl} \qquad \begin{pmatrix} s_{11}^{11} & s_{11}^{22} & 0 \\ s_{22}^{11} & s_{22}^{22} & 0 \\ 0 & 0 & s_{12}^{12} \end{pmatrix} \tag{1}$$

ここに、u_i は変位、ϵ_{ij} はひずみ、σ_{ij} は応力、X_i は物体力、s_{ij}^{kl} は弾性係数テンソルの逆である。

(2)　Airy の応力関数の複素表現 [1]

問題 (1) において、Airy の応力関数 ψ は方程式

$$S_{11}^{22}\frac{\partial^4\psi}{\partial z^4} - 4S_{11}^{12}\frac{\partial^4\psi}{\partial z^3\partial\bar{z}} + 2(S_{11}^{11} + 2S_{12}^{12})\frac{\partial^4\psi}{\partial z^2\partial\bar{z}^2} - 4S_{12}^{11}\frac{\partial^4\psi}{\partial z\partial\bar{z}^3} + S_{22}^{11}\frac{\partial^4\psi}{\partial\bar{z}^4} = 0 \tag{2}$$

を満足する。ここに、$z = x_1 + ix_2$ であり、S_{ij}^{kl} は次で与えられる。

$$S_{11}^{11} = \frac{1}{4}\left(s_{11}^{11} + s_{22}^{22} + 4s_{12}^{12} - 2s_{22}^{11}\right), \qquad S_{11}^{22} = S_{22}^{11} = \frac{1}{4}\left(s_{11}^{11} + s_{22}^{22} - 4s_{12}^{12} - 2s_{22}^{11}\right)$$

$$S_{11}^{12} = S_{12}^{11} = \frac{1}{4}\left(s_{11}^{11} - s_{22}^{22}\right), \qquad S_{12}^{12} = \frac{1}{4}\left(s_{11}^{11} + s_{22}^{22} + 2s_{22}^{11}\right)$$

方程式 (2) の一般解は、(2) の特性方程式の根のうちの2根 γ_1、γ_2 に対し、$z_\alpha = z + \gamma_\alpha\bar{z}$ $(\alpha = 1, 2)$ とすると、

$$\psi(z) = \phi(z_1) + \bar{\phi}(\bar{z}_1) + \chi(z_2) + \bar{\chi}(\bar{z}_2) \tag{3}$$

で与えられる。ここに、ϕ、χ は任意の解析関数である。特性根 γ_1、γ_2 は方程式

$$s_{22}^{22}\alpha^4 - 2(s_{11}^{11} + 2s_{12}^{12})\alpha^2 + s_{11}^{11} = 0 \tag{4}$$

の2根を α_1、α_2 とすると

$$\gamma_\lambda = \frac{\alpha_\lambda - 1}{\alpha_\lambda + 1}, \qquad \alpha_\lambda = \frac{\gamma_\lambda + 1}{\gamma_\lambda - 1} \qquad (\lambda = 1, 2) \tag{5}$$

で与えられる。式 (3) を用いて、変位および応力は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} D &= u_1 + iu_2 = \delta_1\phi'(z_1) + \rho_1\bar{\phi}'(\bar{z}_1) + \delta_2\chi'(z_2) + \rho_2\bar{\chi}'(\bar{z}_2) \\ \Phi &= \sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\sigma_{12} = -4\gamma_1^2\phi''(z_1) - 4\bar{\phi}''(\bar{z}_1) - 4\gamma_2^2\chi''(z_2) - 4\bar{\chi}''(\bar{z}_2) \\ \Theta &= \sigma_{11} + \sigma_{22} = 4\gamma_1\phi''(z_1) + 4\bar{\gamma}_1\bar{\phi}''(\bar{z}_1) + 4\gamma_2\chi''(z_2) + 4\bar{\gamma}_2\bar{\chi}''(\bar{z}_2) \end{aligned} \tag{6}$$

ここに、δ_α、ρ_α は $\beta_\lambda = s_{22}^{11} - s_{22}^{22}\alpha_\lambda$ $(\lambda = 1, 2)$ とするとき、以下のように定義する。

$$\delta_1 = (1 + \gamma_1)\beta_2 - (1 - \gamma_1)\beta_1, \qquad \delta_2 = (1 + \gamma_2)\beta_1 - (1 - \gamma_2)\beta_2 \tag{7}$$

$$\bar{\rho}_1 = (1 + \gamma_1)\beta_2 + (1 - \gamma_1)\beta_1, \qquad \bar{\rho}_2 = (1 + \gamma_2)\beta_1 + (1 - \gamma_2)\beta_2 \tag{8}$$

2 境界要素法

(1) 境界積分方程式

この問題の解は、Somigliana の公式

$$C_{ij}u_j(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial B} G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})T^y_{jk}u_k(\boldsymbol{y})\,ds_y - \int_{\partial B} S_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})u_i(\boldsymbol{y})\,ds_y \tag{9}$$

において、点 $\boldsymbol{x}$ を境界に近づけた式を未知境界値についての積分方程式として解くことにより得られる。ここに、C_{ij} は自由項、$T^n_{ij}u_j = \sigma_{ij}[u_k]n_j$ は境界応力である。また、G_{ij}、S_{ij} はそれぞれ基本解および二重層核である。

(2) 基本解および二重層核

基本解および二重層核は、それぞれ、単位集中力 P による変位および単位くい違い U による変位により与えられる。これらの複素関数表現は

$$\phi^G(z_1) = \frac{Q}{2\pi}z_1\log z_1, \qquad \chi^G(z_2) = \frac{R}{2\pi}z_2\log z_2 \tag{10}$$

$$\phi^S(z_1) = \frac{V}{2\pi}\log z_1, \qquad \chi^S(z_2) = \frac{W}{2\pi}\log z_2 \tag{11}$$

によって与えられる。ここに、係数 Q、R および V、W は、それぞれ、P と U とにより次のように与えられる。

$$Q = \frac{(1+\alpha_1)}{8(1+\gamma_1)(\alpha_1^2-\alpha_2^2)s_{22}^{22}}\left(\bar{\rho}_1 P + \delta_1\bar{P}\right), \qquad R = \frac{-(1+\alpha_2)}{8(1+\gamma_2)(\alpha_1^2-\alpha_2^2)s_{22}^{22}}\left(\bar{\rho}_2 P + \delta_2\bar{P}\right)$$

$$V = \frac{(1+\alpha_1)}{8(1+\gamma_1)(\alpha_1^2-\alpha_2^2)s_{22}^{22}}\left(n+\gamma_1\bar{n}\right)\left(U+\gamma_1\bar{U}\right), \qquad W = \frac{-(1+\alpha_2)}{8(1+\gamma_2)(\alpha_1^2-\alpha_2^2)s_{22}^{22}}\left(n+\gamma_2\bar{n}\right)\left(U+\gamma_2\bar{U}\right)$$

3 高速多重極法

基本解 (10) の多重極展開を考慮すると、複素ポテンシャル ϕ、χ の多重極展開は

$$\phi(z_1) = M_{-1}z_1\log z_1 - M_0\log z_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{M_n}{z_1^n} + C_1, \qquad \chi(z_2) = N_{-1}z_2\log z_2 - N_0\log z_2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{N_n}{z_2^n} + C_2 \tag{12}$$

となる。C_1、C_2 は変位および応力に無関係な定数である。局所展開を、ポテンシャル問題の場合と同様に、

$$\phi(z_1) = \sum_{n=1}^{\infty}K_n z_1^n, \qquad \chi(z_2) = \sum_{n=1}^{\infty}L_n z_2^n \tag{13}$$

とおくと、移動公式 M2M、M2L、L2L は多重極モーメント M_n および局所展開係数 K_n について

$$M'_{-1} = M_{-1}, \qquad M'_0 = a_1M_{-1} + M_0, \qquad M'_n = \frac{a_1^{n+1}}{n(n+1)}M_{-1} + \frac{a_1^n}{n}M_0 + \sum_{m=1}^{n}\binom{n-1}{m-1}a_1^{n-m}M_m \tag{14}$$

$$K_1 = (\log a_1 + 1)M_{-1} - \frac{M_0}{a_1} - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{mM_m}{a_1^{m+1}}, \qquad K_n = \frac{(-1)^n}{a_1^n}\left[\frac{a_1M_{-1}}{n(n-1)} + \frac{M_0}{n} + \sum_{m=1}^{\infty}\binom{n+m-1}{m-1}\frac{M_m}{a_1^m}\right] \tag{15}$$

$$K'_n = \sum_{m=n}^{\infty}a_1^{m-n}K_m \tag{16}$$

となる。ここに、移動ベクトル a に対して $a_1 = a + \gamma_1\bar{a}$ と定義する。N_n、L_n についても a_1 を $a_2 = a + \gamma_2\bar{a}$ に替えればまったく同じ関係式を得る。

以上で高速多重極境界要素法を構成するための準備は整った。計算手順は等方性の場合 [2] と大差はないが、z の代わりに z_1、z_2 を使うことが異なる。すなわち、基本解の影響が大きな方向が 2 つあり、それを配慮した計算が必要となる。解析結果については当日報告する。

参考文献

[1] Green, A.E. and W. Zerna : *Theoretical Elasticity*, 2nd ed. Oxford, 1968.

[2] 福井卓雄, 持田哲郎 : 高速多重極境界要素法の 2 次元静弾性問題への応用, 境界要素法論文集, **13**, pp. 131–136, 1996.