離散作用素積分境界要素法への高速多重極法の応用

福井大学大学院　学生会員　○　岡山 美央
福井大学工学部　正会員　　　福井 卓雄

1　はじめに

本研究は, Lubich[1] の離散作用素積分法 (Operational Quadrature Method) による波動問題の時間領域境界要素法への高速多重極法の適用を目的とする。

Lubich の離散作用素積分法とは，線込み積分の近似値を離散化線込み積により計算し，一部の積分を差分解に置き換えることによって，重みを決定する方法である。この離散作用素積分法による波動問題の時間領域境界要素法についてはすでに著者らによって報告され，2 次元波動問題において数値解析を行っている [2]。

ここでは, 波動問題の離散作用素積分境界要素法について述べ, この方法への高速多重極法の適用について紹介する。

2　波動問題の時間領域境界要素法

時間領域における波動問題を考える。外部領域を B，境界を ∂B とする。初期条件 $u|_{t=0}=0$, $\partial u/\partial t|_{t=0}=0$ を仮定する。境界値問題は

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \text{in } B, \qquad u = \hat{u} \qquad \text{on } \partial B_1, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = \hat{s} \qquad \text{on } \partial B_2 \tag{1}$$

となる。ここに，∇^2 は Laplace 作用素，c は位相速度，$\partial/\partial n$ は外向き法線微分を表す。

この問題の解 u は，時間領域境界積分方程式

$$C(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x},t) = \tilde{u}(\boldsymbol{x},t) + \int_{\partial B} G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y},t) * s(\boldsymbol{y},t)\,dS_y - \int_{\partial B} S(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y},t) * u(\boldsymbol{y},t)\,dS_y \tag{2}$$

により表される。ここに，C は点 x の位置に依存するパラメータで，G，S は基本特異解および第二基本特異解である。$\tilde{u}$ は入射波であり，初期条件を満足する。

離散作用素積分法の適用　離散作用素積分法を時間領域境界積分方程式 (2) に適用する。境界関数および離散化線込み積を (2) に代入すれば

$$C(\boldsymbol{x}_i)\sum_m \phi_m(\boldsymbol{x}_i)u_m(n\Delta t) = \sum_j\sum_{k=0}^{n-1} A_j^{n-k}(\boldsymbol{x}_i)s_j(k\Delta t) - \sum_j\sum_{k=0}^{n-1} B_j^{n-k}(\boldsymbol{x}_i)u_j(k\Delta t) \tag{3}$$

となる。ここに，影響関数 A_j^{n-k}, B_j^{n-k} は

$$A_j^{n-k}(\boldsymbol{x}) = \frac{\rho^{-(n-k)}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\int_{\partial B}\hat{G}\left(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y},\frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\right)\phi_j(\boldsymbol{y})\,e^{-2\pi i(n-k)l/L}\,dS_y \tag{4}$$

$$B_j^{n-k}(\boldsymbol{x}) = \frac{\rho^{-(n-k)}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\int_{\partial B}\hat{S}\left(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y},\frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\right)\phi_j(\boldsymbol{y})\,e^{-2\pi i(n-k)l/L}\,dS_y \tag{5}$$

である。ここに，$\delta(\zeta)=\sum_{j=0}^{\infty}\delta_j\zeta^j$ は利用する差分法 (線形マルチステップ法) の生成多項式の商である。また, $\zeta_l=\rho e^{2\pi i l/L}$ である。$\hat{G}$, $\hat{S}$ はそれぞれ，基本特異解および第二基本特異解の Laplace 変換で，次のように与えられる。

$$\hat{G}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y},s) = \frac{1}{2\pi}K_0\left(\frac{s}{c}|x-y|\right), \qquad \hat{S}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y},s) = \frac{\partial\hat{G}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y},s)}{\partial n_y} = -\frac{1}{2\pi}\frac{s}{c}\frac{\partial|x-y|}{\partial n_y}K_1\left(\frac{s}{c}|x-y|\right) \tag{6}$$

ここに，K_n は第 2 種変形 Bessel 関数である。また，和の計算は FFT を用いれば高速に計算することができる。

以上によって, 通常の離散化手法を用いる場合と同様に, 時間領域境界要素法を構成することができる。

3　高速多重極法の適用

境界要素法によって自由度の大きい問題を扱う場合には，高速多重極法の適用が必要になる。そこで，この方法に対する高速多重極法の適用について考える。空間領域においては，$\sum_j A_j^{n-k}(\boldsymbol{x}_i)s_j(k\Delta t)$ の計算を高速化すれば良いので

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_j A_j^{n-k}(\boldsymbol{x}_i)s_j(k\Delta t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^{-(n-k)}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\left[\sum_j s_j(k\Delta t)\int_{\partial B}\hat{G}\left(\boldsymbol{x}_i;\boldsymbol{y},\frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\right)\phi_j(\boldsymbol{y})dS_y\right]e^{-2\pi i(n-k)l/L} \tag{7}$$

の [ ] 内を多重極展開で表現し，高速多重極法を使って計算する。

波動場の多重極展開と移動定理　基本特異解 (6) は，$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_0$ の極座標を (r,θ)，$\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0$ の極座標を (ρ,ϕ) とし，$r>\rho$ のとき次のように展開できる。

$$\hat{G}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y},s)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}K_n\left(\frac{s}{c}r\right)I_n\left(\frac{s}{c}\rho\right)e^{in(\theta-\phi)} \tag{8}$$

ここに，I_n は第 1 種変形 Bessel 関数である。この式より，多重極展開を

$$u(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}M_nK_n\left(\frac{s}{c}r\right)e^{in\theta} \tag{9}$$

で定義する。M_n は多重極モーメントで, (9) より基本解および第 2 基本解の多重極モーメントは，それぞれ

$$M_n^G=I_n\left(\frac{s}{c}\rho\right)e^{-in\phi},\qquad M_n^S=\left[\frac{s}{c}I'_n\left(\frac{s}{c}\rho\right)n_\rho-in\frac{I_n(\frac{s}{c}\rho)}{\rho}n_\phi\right]e^{-in\phi} \tag{10}$$

となる。ここに，(n_ρ,n_ϕ) は単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の (ρ,ϕ) 座標成分である。局所展開は

$$u(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}L_nI_n\left(\frac{s}{c}r\right)e^{-in\phi} \tag{11}$$

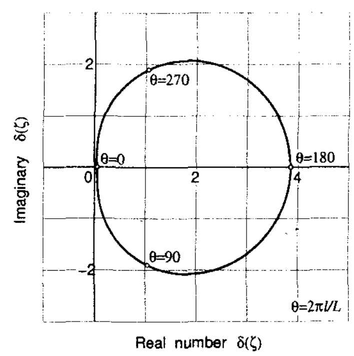
で定義される。また，展開中心の移動による係数の変換関係は，Graf の加法定理を用いて

$$\tilde{M}_n=\sum_{m=-\infty}^{\infty}M_mI_{n-m}\left(\frac{s}{c}\rho\right)e^{-i(n-m)\phi}\qquad\text{(M2M)} \tag{12}$$

$$L_n=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^mM_mK_{m+n}\left(\frac{s}{c}\rho\right)e^{i(m+n)\theta}\qquad\text{(M2L)} \tag{13}$$

$$\tilde{L}_n=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^{m-n}L_mI_{m-n}\left(\frac{s}{c}\rho\right)e^{-i(m-n)\theta}\qquad\text{(L2L)} \tag{14}$$

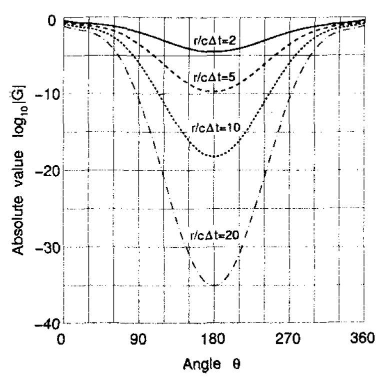
のように得られる。これらの式で，(ρ,ϕ) はそれぞれ $\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{y}_{0'}$, $\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{x}_0$, および $\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}_{0'}$ の極座標である。



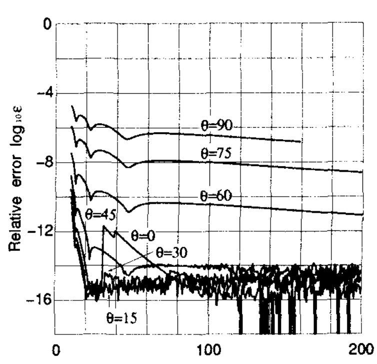
図–1 $\delta(\zeta)$

多重極近似の精度と計算法　数値計算においてどの程度の誤差が生じ，距離に対してどの程度の展開項数が必要となるか，数値的に確認する。図-1 は 2 次差分の場合の $\delta(\zeta)$ $(\rho=0.95)$ の複素平面グラフである。計算の中心となる変形 Bessel 関数の引数はこの値に $r/c\Delta t$ を掛けたものとなる。図-2 は Fourier 変換のパラメータ θ に対する基本特異解 $\hat{G}$ の絶対値をいくつかの距離に対してプロットしたものである。値は $90\le\theta\le 270$ の範囲では距離が遠くなるほど小さな値となっている。

一方，図-3 では θ の種々の値に対する基本解 $\hat{G}$ の多重極展開 (9) (30 項) の計算誤差を示している。θ とともに相対誤差は大きくなっているが，計算精度を次のように考えれば，この誤差は問題にならないことがわかる。計算の最終段階では，$\hat{G}$ に境界値がかかったものを Fourier 変換する。Fourier 変換は $e^{in\theta}$ を係数とする一次結合であるから，$\hat{G}$ に関する絶対誤差，すなわち $\epsilon|\hat{G}|$ が問題となる。$c\Delta t$ はほぼ要素サイズと考えられるので，高速多重極法を適用する $r/c\Delta t$ の値の範囲ではこの誤差は十分に小さく押さえることができると考えられる。



図–2 基本特異解と距離との関係



図–3 多重極展開の相対誤差

4　おわりに

離散作用素積分境界要素法へ高速多重極法を適用するため，まず多重極展開を行い，次に数値計算における項数制限を確認した。

今後も，さらなる研究を進めていく !!

参考文献

[1] C. Lubich : Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Mumer. Math.*, **52**, pp. 129–145, 1988.

[2] 岡山美央，福井卓雄：離散作用素積分法を利用した時間領域境界要素法の解析, 第 56 回年次学術講演会講演概要集, pp. 491, 2003.