

境界要素法における境界上の数値解のスミージングについて

福井大学工学部 学生会員 ○ 浦 勝一
福井大学工学部 正会員 福井 卓雄

本報告は、境界要素解析により得られた境界データをもとにして、領域境界上の解をスミージングしてより精度の高い解を得るための手法を提案するものである。

直接法による境界要素解析において一定要素を使用する場合には、境界上の解の接線方向勾配や要素境界付近の数値解の誤差が大きくなる傾向がある。これは境界周辺の解が二重層ポテンシャルの影響を強く受けることによるものである。一般に、クラック問題などの特殊な問題および境界の隅角周辺を除いて、一定要素による解析でも境界値そのものは十分な精度をもつ。したがって、境界付近の数値解をスミージングすることにより、高次の要素を使わなくても十分な精度の数値解を境界付近で得ることができる。本研究では、層ポテンシャル法を用いたスミージング法を提案し、その効果を検証する。

このような手法は、とくに、不定形要素を用いる 3 次元問題において境界上の任意の点の境界値を求める場合に必要となるが、ここでは 2 次元ポテンシャル問題を対象として簡単な例をあげて手法とその効果について論じる。

1 一定要素境界要素法の解の特性

2 次元ポテンシャル境界値問題

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{in } B, \quad u = \hat{u} \quad \text{on } \partial B_1, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \hat{s} \quad \text{on } \partial B_2 \quad (1)$$

を考える。この問題の境界積分方程式は、なめらかな境界上で

$$\frac{1}{2}u(x) = \int_{\partial B} G(x, y) s(y) ds_y - \int_{\partial B} S(x, y) u(y) ds_y \quad (2)$$

である。ここに、 G および S は基本解および二重層核で、

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x - y|}, \quad S(x, y) = \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \quad (3)$$

で与えられる。式 (2) は、領域の u の値が一重層 (右辺第 1 項) および二重層 (第 2 項) のポテンシャルで表されることを示している。一定要素を用いる場合の離散化方程式は

$$\frac{1}{2}u(x) = \sum_{i=1}^N s_i \int_{\partial B_i} G(x, y) ds_y - \sum_{i=1}^N u_i \int_{\partial B_i} S(x, y) ds_y \quad (4)$$

となる。ここに、 ∂B_i は i 番目の要素を表す。式 (4) は通常良い近似解 u_i 、 s_i を与える。しかしながら、(4) の右辺で与えられるポテンシャル場は境界付近で必ずしもなめらかではない。図-1 に、一定要素周辺の一重層および二重層ポテンシャルの分布の様子を示す。とくに、二重層ポテンシャルの分布に特異性が強く、要素中央では接線方向の勾配は 0 である。このことが、境界周辺の数値解の精度を悪くしている原因となっている。

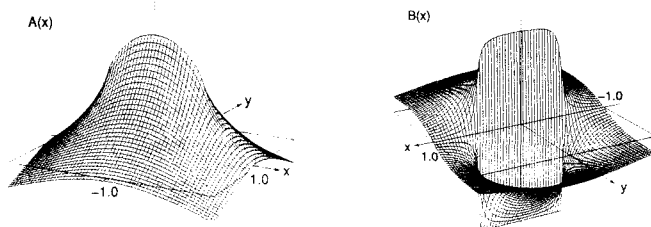


図-1 一定要素周辺の一重層 (右) および二重層 (左) ポテンシャルの分布

2 スムージングの方法

ここで提案する方法は、層ポテンシャルを使って境界付近にソレノイド場を作るものである。図-2に示すように、ターゲットとなる境界点付近の境界をはさんで2つの仮想境界 S_i と S_o をとる。要素の個数を $2m+1$ とする。境界周辺のポテンシャル場を S_i 、 S_o 上の密度 ϕ_i 、 ϕ_o による一重層ポテンシャル場

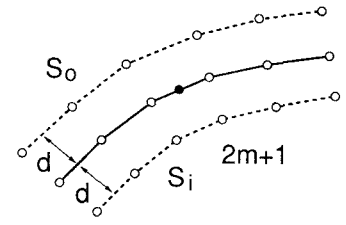


図-2 境界付近の仮想境界

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{2m+1} \phi_i(k) \int_{\partial S_i(k)} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds_y + \sum_{k=1}^{2m+1} \phi_o(k) \int_{\partial S_o(k)} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds_y \quad (5)$$

で与えるとする。境界 ∂B 上では境界値 u および $\partial u / \partial n$ の両方が与えられているから、 $2m+1$ 個の境界要素中点における境界値から $2(2m+1)$ 個の条件

$$u(\mathbf{x}_k) = \sum_{l=1}^{2m+1} \phi_i(l) \int_{\partial S_i(l)} G(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}) ds_y + \sum_{l=1}^{2m+1} \phi_o(l) \int_{\partial S_o(l)} G(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}) ds_y \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}_k) = \sum_{l=1}^{2m+1} \phi_i(l) \int_{\partial S_i(l)} \frac{\partial G}{\partial n_x}(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}) ds_y + \sum_{l=1}^{2m+1} \phi_o(l) \int_{\partial S_o(l)} \frac{\partial G}{\partial n_x}(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}) ds_y \quad (7)$$

を得ることができる。この方程式の解 ϕ_i 、 ϕ_o から得られる場 (5) は、境界値を満足し、かつ、なめらかな場となるはずである。

3 計算例

計算例として、St Venant ねじり問題をゆがみ関数により解析し、境界上の接線方向応力 τ_s を求めて正解と比較した。表-1に正3角柱の結果を示す。式 (4) の右辺の計算により得られる解よりもはるかに精度の高い解が得られている。

表-1 正3角柱のねじり問題の境界上の接線方向応力 τ_s のスムージング：要素数 3×51 ，要素長 0.039， $d = 0.04$

s	τ_s				
	Exact	m = 5		m = 10	
-0.588	0.56636				-1.78290 4.15e+00
-0.549	0.60499				1.31604 -1.18e+00
-0.510	0.64095				0.37575 4.14e-01
-0.471	0.67424				0.77528 -1.50e-01
-0.431	0.70487				0.66595 5.52e-02
-0.392	0.73284			-1.42066 2.94e+00	0.74756 -2.01e-02
-0.353	0.75815			1.40974 -8.59e-01	0.75232 7.69e-03
-0.314	0.78079			0.53769 3.11e-01	0.78284 -2.62e-03
-0.275	0.80077			0.89329 -1.16e-01	0.79979 1.22e-03
-0.235	0.81808			0.78233 4.37e-02	0.81825 -2.09e-04
-0.196	0.83273	-1.13874 2.37e+00		0.84614 -1.61e-02	0.83245 3.41e-04
-0.157	0.84472	1.44094 -7.06e-01		0.83929 6.43e-03	0.84459 1.50e-04
-0.118	0.85404	0.63177 2.60e-01		0.85582 -2.09e-03	0.85383 2.43e-04
-0.078	0.86070	0.94443 -9.73e-02		0.85971 1.15e-03	0.86050 2.32e-04
-0.039	0.86469	0.83416 3.53e-02		0.86473 -4.23e-05	0.86447 2.63e-04
0.000	0.86603	0.87227 -7.21e-03		0.86570 3.71e-04	0.86578 2.83e-04
0.039	0.86469	0.87513 -1.21e-02		0.86434 4.09e-04	0.86443 3.09e-04
0.078	0.86070	0.82180 4.52e-02		0.86071 -1.12e-05	0.86040 3.43e-04
0.118	0.85404	0.95893 -1.23e-01		0.85289 1.35e-03	0.85373 3.64e-04
0.157	0.84472	0.56054 3.36e-01		0.84656 -2.18e-03	0.84435 4.36e-04
0.196	0.83273	1.76880 -1.12e+00		0.82666 7.29e-03	0.83241 3.90e-04
0.235	0.81808			0.83256 -1.77e-02	0.81752 6.80e-04
0.275	0.80077			0.76152 4.90e-02	0.80069 1.00e-04
0.314	0.78079			0.88198 -1.30e-01	0.77932 1.88e-03
0.353	0.75815			0.48484 3.61e-01	0.76014 -2.63e-03
0.392	0.73284			1.63263 -1.23e+00	0.72563 9.84e-03
0.431	0.70487				0.72147 -2.35e-02
0.471	0.67424				0.62848 6.79e-02
0.510	0.64095				0.75804 -1.83e-01
0.549	0.60499				0.28757 5.25e-01
0.588	0.56636				1.61080 -1.84e+00