

写像変換を用いたエレメントフリー解析

信州大学大学院
信州大学工学部
信州大学工学部

正会員
正会員

○野町直秀
大上俊之
小山 茂

1. はじめに

近年、要素分割を必要としないエレメントフリー
ガラーキン法 (EFGM) に関する研究が工学のさまざ
ま分野で行われている¹⁾。EFGMは関数近似に移動
最小二乗法 (MLSM) を用いることによりメッシュレ
ス化を可能としている手法であるが、基本境界条件
処理が複雑になるといった問題がある。

本研究では、写像平面上でエレメントフリー解析
を行うことにより、基本境界条件を直接処理でき、曲
線境界を有する形状の問題に対して適用できるエレ
メントフリー法を提案する。

2. 写像変換と内挿関数

パラメータ t によって決まる関数を $u(t)$ 、内挿関数
を $\psi_i(t)$ とすると、 $i = 0 \sim n$ の $n + 1$ 個の u_i を通る近
似関数 $u^h(t)$ は

$$u^h(t) = \sum_{i=0}^n \psi_i(t) u_i \tag{1}$$

と表すことができる。2次元の場合は、図-1に示すよ
うに領域の境界に沿ってパラメータ t_1, t_2 を導入すれ
ば、写像変換することによって図-2のように直交格子
が得られる。空間内に与えられた $(n_1 + 1) \times (n_2 + 1)$
個の点を通る平面 (x, y) は t_1, t_2 の関数として次式に
よって表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} x(t_1, t_2) &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \psi_i(t_1) \psi_j(t_2) x_{ij} \\ y(t_1, t_2) &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \psi_i(t_1) \psi_j(t_2) y_{ij} \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

ここに $x_{ij} = x(i, j)$, $y_{ij} = y(i, j)$, t_1, t_2 は、それぞ
れ、 $0 \leq t_1 \leq n_1, 0 \leq t_2 \leq n_2$ を満たす実数である。
変位 u, v の関数近似に対しても内挿関数 $\psi_i(t)$ を適用
することにより、関数値 $u(t_{1i}, t_{2j})$, $v(t_{1i}, t_{2j})$ が節点
の変位値 u_{ij}, v_{ij} を表すことになるので、基本境界条
件の処理を FEM と同様の方法で行うことができる。

3. 写像平面上におけるエレメントフリー法

(1) 節点積分法と積分重みの配分

計算効率の向上を図るために領域積分を節点で評
価する節点積分法 (NBNM)²⁾ を適用する。NBNMで
は、剛性を数値的に評価するための積分点と節点を

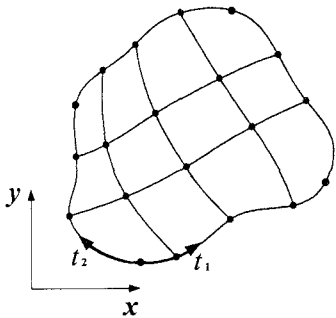


図-1 実平面上

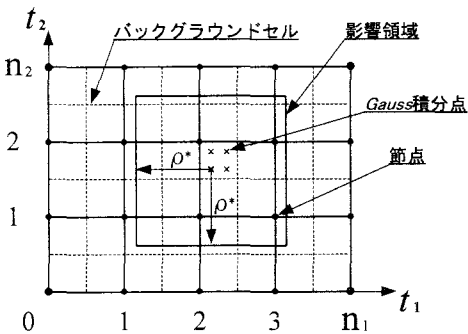


図-2 写像平面上

一致させることにより計算時間を短縮することがで
きる。通常、節点積分法では積分の重みを節点に配分
する作業が繁雑となるが、本手法では解析領域を節
点間隔が1の矩形格子状の領域に写像変換しているた
め、各節点に配分する重みが領域内部点では1、境
界上では0.5、隅角部では0.25となり、節点位置に応
じて自動的に設定することが可能となる (図-3)。

(2) 剛性マトリックスの作成

EFGMによる定式化はFEMの定式化とほぼ同じ
であり、弾性問題の剛性マトリックスは、形式的には
FEMと同様に以下のような形で求めることができる。

$$K = \iint_{\Omega} B^T D B dx dy \tag{3}$$

ここに、 Ω は実平面上における領域、 K は剛性マトリ
クス、 B はひずみ変位マトリクス、 D は応力ひずみマ
トリクスである。式 (3) を写像平面 (t_1, t_2) 座標に変換
し、そこに節点積分を適用することにより K が以下

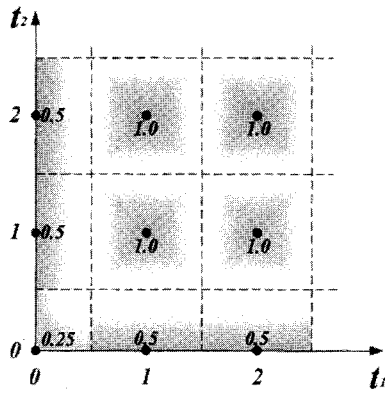


図-3 本手法における積分重みの配分

のように得られる.

$$\begin{aligned}
 K &= \iint_{\Omega^*} \mathbf{B}^{*T} \mathbf{D} \mathbf{B}^* |J_D| dt_1 dt_2 \\
 &= \iint_{\Omega^*} F^*(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\
 &= \sum_{I=1}^{NP} F^*(t_{1I}, t_{2I}) W_I
 \end{aligned} \quad (4)$$

ここに, Ω^* は写像平面における領域, $\mathbf{B}^*$ は写像平面上で求めた $\mathbf{B}$ を示し, $|J_D|$ はヤコビアン, NP は解析領域内に分布する総節点数, W_I は節点 I についての領域積分のための重みである.

(3) 剛性評価における安定化

NBNMでは1点積分による積分精度の低下が考えられる. その対策としてTaylor級数展開による安定化を図る. すなわち, $F^*(t_{1I}, t_{2I})$ を節点 I を基準とした座標でTaylor展開し, 式(4)に代入することにより数値解の精度を改善する.

$$\begin{aligned}
 K &= \sum_{I=1}^{NP} \left[F^*(t_{1I}, t_{2I}) W_I + \right. \\
 &\quad \left. \iint_{\Omega_I^*} \left\{ \frac{\partial}{\partial t_1} F^*(t_1, t_2) \right|_{(t_{1I}, t_{2I})} (t_1 - t_{1I}) + \frac{\partial}{\partial t_2} F^*(t_1, t_2) \right|_{(t_{1I}, t_{2I})} (t_2 - t_{2I}) \right\} d\Omega_I^* \right] \quad (5)
 \end{aligned}$$

ここに, Ω_I^* は節点 I の周辺に設定された領域を表す.

4. 解析例

図-4に示すような一様な圧力を受ける厚肉円筒モデルを対象とし. 対称性より1/4部分を解析する. 影響領域を $\rho^* = 3, 4$ とし, 比較のためのEFGMでは数値積分に 3×3 のGauss積分を用いた. 図-6は $r = 4\text{cm}$ における σ_r の誤差分布を示している. EFGMに比べNBNMでは影響領域の大きさが解析結果へ与える影

響が大きいことが分かる. NBNMとEFGMの計算時間の比較を表-1に示す.

5. おわりに

簡単な数値計算例を通して本手法が曲線境界を有する2次元弾性問題に適用可能であることが示された. 安定化を考慮したNBNMの解析結果については, 当日報告する予定である.

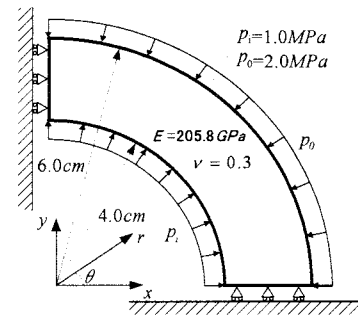


図-4 厚肉円筒モデル

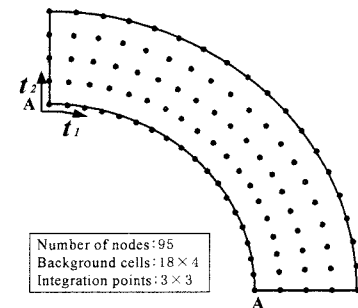


図-5 節点配置(実平面)

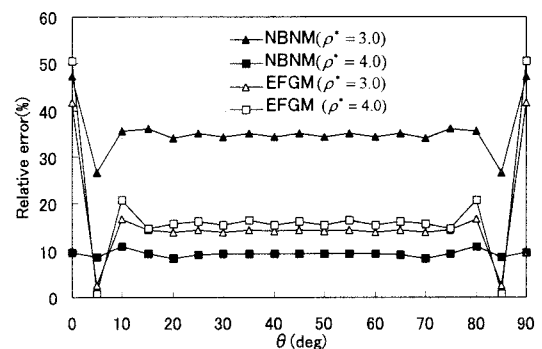
図-6 A-A線上の σ_r の誤差分布

表-1 NBNMとEFGMの計算時間の比較(sec)

	$\rho^*=3.0$	$\rho^*=4.0$
NBNM	0.22	0.30
EFGM	1.96	2.98

参考文献

- 1) 鈴木克幸他: 特集 メッシュレス法, 計算工学, Vol.7, No.1, 2-23, 2002
- 2) 長嶋利夫他: 節点単位の処理に基づくメッシュレス法の開発(定式化および二次元弾性問題への適用), 機論A, 62-603, 2474-2480, 1996.