# 2次の区分多項式を利用した変断面柱の座屈解析について

正会員　名古屋市立大学大学院芸術工学研究科　草間晴幸

## 1．はじめに

著者は、参考文献2)、3) に見られるように、学生、技術者、出発点に立つ研究者を対象として、有限要素法関連の解りやすい教育用図書の作成に努めてきた。しかしながら、その内容は単に教育用レベルに留まらず､研究シーズが多分に包含されているとの評価も受けており､卒業研究､修士論文､学術論文の参考文献に引用された場合も数多く存在する。その延長線上の研究として、参考文献1) において、1次の区分多項式を利用した柱の座屈解析について報告した。本論では、2次の区分多項式を利用した変断面柱の座屈解析について報告する。

## 2．数理モデルとマトリックス表現式

長さ L の弾性変断面柱に軸圧縮荷重 P が作用した場合の座屈現象を表す支配方程式は次のようになる。

$$\frac{d^2v}{dx^2}+p(x)v=0 \quad (0\leq x\leq 1) \quad p(x)=PL^2/EI(x) \tag{Eq・1}$$

ここで、$x$ は柱の中立軸を座標軸とした座標変数であり、長さ $L$ によって無次元化されている。

(Eq・1) に対して、重み付き残差法の1つである Galerkin 法を適用すると次式を得る。

$$\int_D W_nRdD=\int_0^1 W_n(\frac{d^2\hat{v}}{dx^2}+p\hat{v})dx=0 \tag{Eq・2}$$

ここで、$Wn$ は重み関数、$R$ は残差､$\hat{v}$は柱のたわみ $v$ の近似関数である。

(Eq・2) を弱形式で表現すると次式となる。

$$\int_0^1 \frac{dW_n}{dx}\frac{d\hat{v}}{dx}dx-\int_0^1 pW_n\hat{v}dx=\left[W_n\frac{d\hat{v}}{dx}\right]_0^1 \tag{Eq・3}$$

(Eq・1) の近似解として、次式で表される2次の区分多項式を利用する。

$$\hat{v}=\sum_{m=1}^{M}(v_m\phi_1+v_0\phi_2+v_{m+1}\phi_3) \tag{Eq・4}$$

ここで、$M$ は分割された解析領域の要素数、$m$ は要素番号、$v_m$ および $v_{m+1}$ はそれぞれ要素 $m$ の両端における $v$ の値、$v_0$ は内部節点の $v$ の値、$\phi_1$、$\phi_2$、$\phi_3$ はそれぞれ以下の式で表される形状関数である。

$$\phi_1=\xi(\xi-1)/2 \quad , \quad \phi_2=-(\xi+1)(\xi-1) \quad , \quad \phi_3=\xi(\xi+1)/2 \tag{Eq・5}$$

上式で表現される2次の区分多項式を Fig-1 に示す。図中、λは要素の長さ、ξは要素の局所座標変数である。Galerkin 法の定義により重み関数として形状関数を適用し、(Eq・3) をマトリックス表現した場合、各要素のマトリックス方程式は次式となる。

$$[[K_e]-\bar{p}[G_e]]\{V_e\}=\{F_e\} \tag{Eq・6}$$

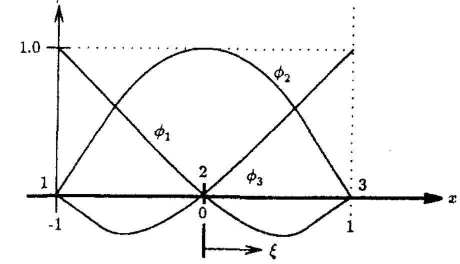


Fig-1

係数マトリックス $[K_e]$ と $[G_e]$ の $(i,j)$ 行列要素はそれぞれ次式である。

$$K_{ij}=\int_{x_m}^{x_{m+1}}\frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}dx=\frac{2}{\lambda}\int_{-1}^{1}\frac{d\phi_i}{d\xi}\frac{d\phi_j}{d\xi}d\xi \qquad G_{ij}=\int_{x_m}^{x_{m+1}}\phi_i\phi_j dx=\frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1}\phi_i\phi_j d\xi \quad \text{(Eq・7)}$$

上式に（Eq・5）を適用すると、（Eq・6）の係数マトリックスは次式のように単純な形となる。

$$[K_e]-\bar{p}[G_e]=\alpha\begin{bmatrix}7&-8&1\\-8&16&-8\\1&-8&7\end{bmatrix}-k_i\beta\begin{bmatrix}4&2&-1\\2&16&2\\-1&2&4\end{bmatrix} \qquad \text{(Eq・8)}$$

ここで、 $\alpha=1/3\lambda,\quad \beta=\bar{p}\lambda/30,\quad \bar{p}=PL^2/EI_0,\quad k_i=I_0/I_i$

具体的な解析例として、Fig-2 に示されるステップ柱の座屈荷重を求める。今、$L_1=L_2=L/2, I_1=4I, I_2=I$ と仮定し、解析領域を２等分割した場合、（Eq・6）で表される各要素のマトリックス方程式を重ね合わせることによって得られる全体マトリックス方程式が持つ全体係数マトリックスは以下のようになる。

$$[K]-\bar{p}[G]=\alpha\begin{bmatrix}7&-8&1&0&0\\-8&16&-8&0&0\\1&-8&14&-8&1\\0&0&-8&16&-8\\0&0&1&-8&7\end{bmatrix}-\beta/4\begin{bmatrix}16&8&-4&0&0\\8&64&8&0&0\\-4&8&20&2&-1\\0&0&2&16&2\\0&0&-1&2&4\end{bmatrix} \qquad \text{(Eq − 9)}$$

境界条件を考慮すると、両端単純支持変断面柱の座屈条件式は以下のようになる。

$$det\left[\ \alpha\begin{bmatrix}16&-8&0\\-8&14&-8\\0&-8&16\end{bmatrix}-\beta/4\begin{bmatrix}64&8&0\\8&20&2\\0&2&16\end{bmatrix}\ \right]=0 \qquad \text{(Eq − 10)}$$

この固有方程式から、閉じた形の座屈条件式が次式で表される。

$$30\mu^3-94\mu^2+43\mu-3=0 \quad , \quad \mu=\beta/4\alpha \qquad \text{(Eq − 11)}$$

上式の最小固有値は $\mu=0.0852$ となり、最終的に、両端が単純支持されたステップ柱の座屈荷重は $P_{cr}=1.381\pi^2EI/L^2$ となる。この座屈係数の厳密解は $P_{cr}=1.479\pi^2EI/L^2$ であり、数値解析解は７％の誤差を 有している。

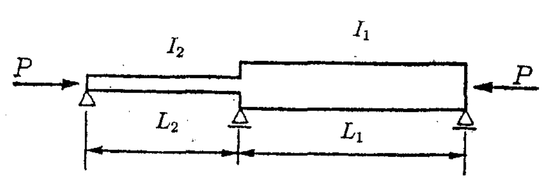

Fig.2

### 3．おわりに

２次の区分多項式を利用して、両端が単純支持された変断面柱の１座屈解析例を示した。本論は、手計算で弾性変断面柱の座屈解析を学習させる有効な資料を提供できたと考える。

[参考文献]


1） 草間晴幸、１次の区分多項式を利用した柱の座屈解析について、H14 年度土木学会中部支部

2） 草間晴幸他２名、初学者のための有限要素解析事始め、ＨＢＪ出版局、1991

3） 草間晴幸・谷山健、有限帯板法、日刊工業新聞社、1994

4） O.C.Zienkiewicz・K.Morgan 著、伊理正男他訳、有限要素と近似、ワイリージャパン、1984