

亀裂を含む長方形板の自由振動解析

名城大学 学生員 ○土山 正登 (株)安部工業所 正会員 國富 康志
東海女子大学 正会員 藤井 康寿 名城大学 正会員 中川 建治

1 解析対象

亀裂を含む平板や壁体の振動あるいは音響問題の基礎的な研究として、直線状の亀裂1本を板の中心線上に持つ（亀裂中心は直線上で偏在可能）長方形板の曲げ振動解析を報告する。

基礎式は薄板の曲げ振動として最も簡単な式(1)に基づくものとして、亀裂の長さや中心位置と自由振動の固有周期との関係を研究する。解は $X < 0$ 部の解 $w_1(x, y, t)$ と $0 < X$ 部の $w_2(x, y, t)$ とする。

$$m \frac{\partial^2 w_j}{\partial t^2} + D \nabla^2 \nabla^2 w_j(x, y, t) = 0 \quad \dots (1)$$

長方形板の支持条件は、 $y = 0, y = Ly$ の相対2辺は単純支持で、 $x = \pm Lx$ 辺は固定支持としている。亀裂は図1に示すように中心 y 軸上にあり、完全開口部 ($Mx = Rx = 0$) の長さは $2a$ 、Process zone 相当部が両先端に長さ b として（この点が本研究の特徴である）設けられている。自由振動であるから解は次の形となる。

$$\begin{cases} w_j = e^{i\omega t} \sum_k X_{jk}(x) \sin\left(\frac{k\pi y}{L_y}\right) \\ X_{jk}(x) = \text{指数関数(割愛)} \end{cases} \quad \dots (2)$$

2 開口の構成

Process zone を含めた開口部(変位不連続部)の形状 $g(\xi)$ は式(3)と図2に示すように区間 $2(a+b)$ 長を半周期とするフーリエ sin 級数 N_c 項で表せるものと仮定し、その係数(未定係数)を μ_k とする（有効区間は $2(a+b)$ ）。

$$g(\xi) = \sum_{k=1}^{N_c} \mu_k g_k = \sum_{k=1}^{N_c} \mu_k \sin \frac{k\pi}{(a+b)} \eta \quad \dots (3)$$

解析では $N_c \approx 40$ 程度にしている。

次に開口を表す基本関数 g_k の両側に0区間を付加して板のスパン Ly に亘る関数 $h_k(y)$ を定義してこれをフーリエ sin 級数 ($N_s \approx 140$) に展開する。すなわち

$$\begin{aligned} h_k(y) &= 0, & 0 < y < \eta_c - (a+b) \\ &= g_k(\eta), & \eta_c - (a+b) < y < \eta_c + (a+b) \\ &= 0, & \eta_c + (a+b) < y < Ly \end{aligned}$$

という関数を展開する（図3参照）。この展開は式(4)となり、スパン Ly に亘って有効となる。

$$h_k(\xi) = \sum_{j=1}^{N_s} \gamma_{kj} \sin \frac{j\pi}{L_y} y \quad \dots (4)$$

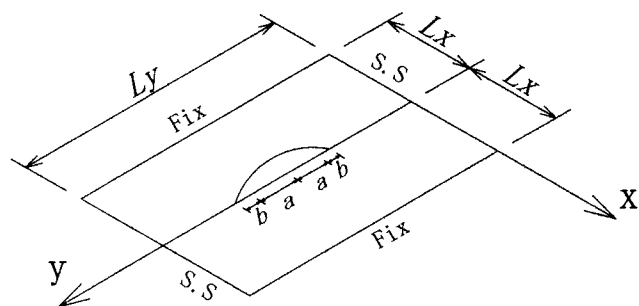


図1 解析対象とする平板と亀裂

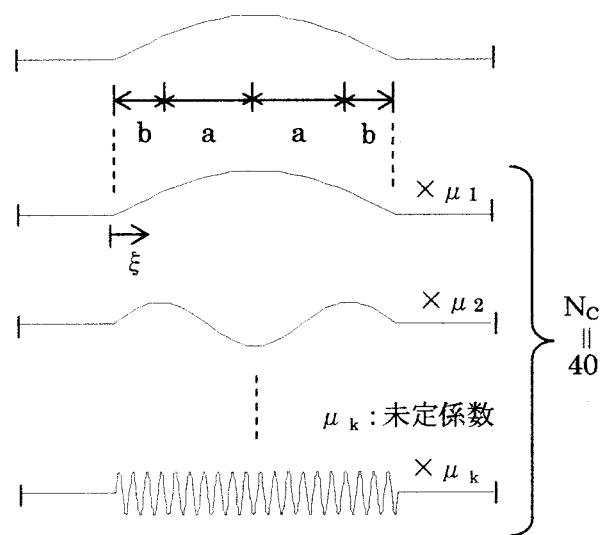


図2 亀裂開口部の形状

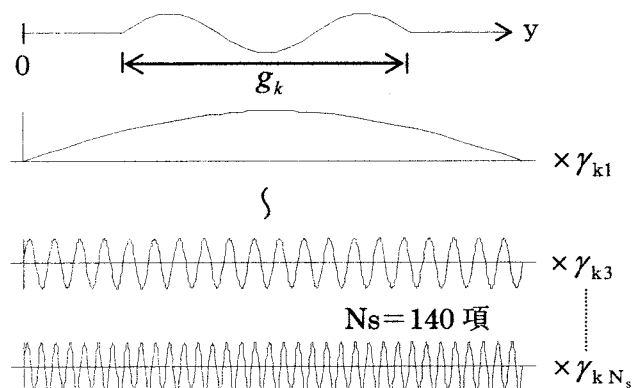


図3 板の長さ方向に関する形状

3 開口部の境界条件の導入法

ここに設定した開口基本関数 $h_k(y)$ は両側の板の連続部 ($0 < y < \eta_c - (a+b)$) と ($\eta_c + (a+b) < y < Ly$) においては 0 と仮定されているのでフーリエ級数 N_s 項までの精度として連続性は自動的に満足されている。

亀裂構成法として、式(5)に示す断面力 M_x あるいは R_x の二乗積分値 (完全開口部 ($\eta_c - a < y < \eta_c + a$) のみで積分) が基本開口関数 $g_k(y)$ (拡張して $h_k(y)$) の未定係数 μ_k ($k=1 \sim N_c=40$) で偏微分して 0 (即ち断面力最小) になるように最小二乗法を活用する。

$$\left. \begin{aligned} \left(\int_{\eta_c-a}^{\eta_c+a} M_x^2 dx \right)_{\min} &: y \text{ 軸に関して対称系} \\ \left(\int_{\eta_c-a}^{\eta_c+a} R_y^2 dy \right)_{\min} &: y \text{ 軸に関して逆対称系} \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

たわみ w_1, w_2 は解析的に表示されているが、式(5)の最小二乗法によって $N_c=40$ 元の行列の行列式を 0 にするような固有値を繰り返し計算で導くことになる。なお、Process zone 相当部に拘束は設けない。

4 結果

板上 ($Ly=100\text{cm}$, $2Lx=100\text{cm}$) に直線状の亀裂 1 本を中心線上に持つ対称、逆対称の開口部 a の長ささと周期の関係の一例を図 4, 5 に、第一次モードのたわみとたわみ勾配を図 6, 7, 9, および M_x, R_x の分布図を図 8, 10 に示す。

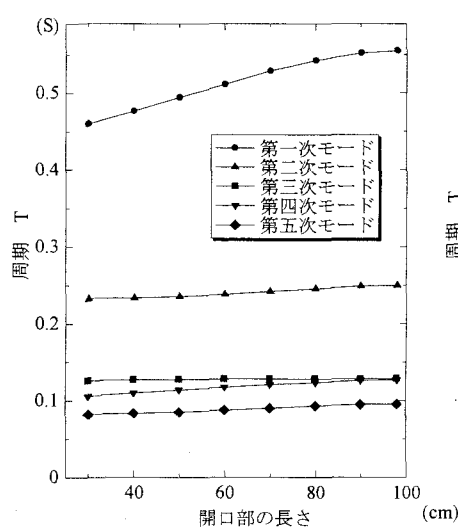


図 4 対称モードの開口部の変化に対する周期

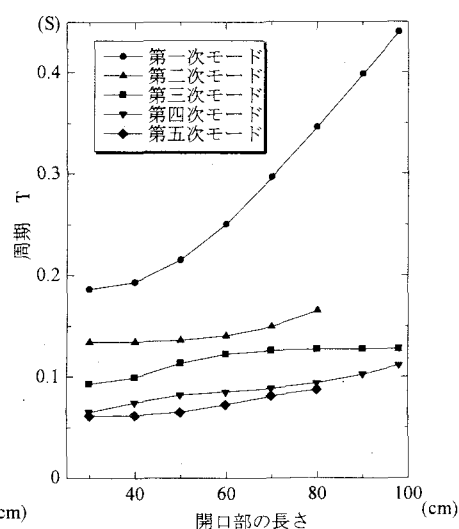


図 5 逆対称モードの開口部の変化に対する周期

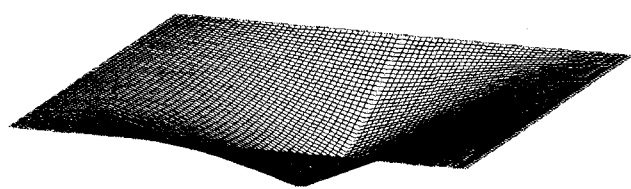


図 6 対称一次モードのたわみ

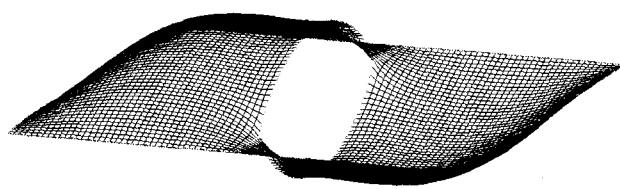


図 7 対称一次モードのたわみ勾配

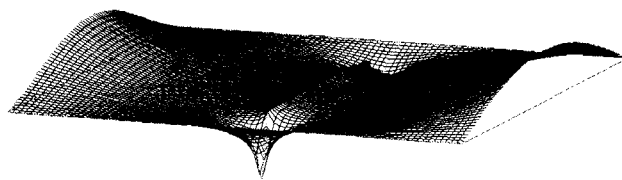


図 8 対称モードの M_x

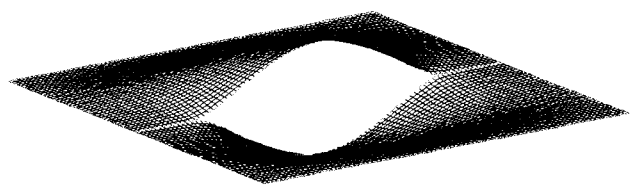


図 9 逆対称第一次モードのたわみ

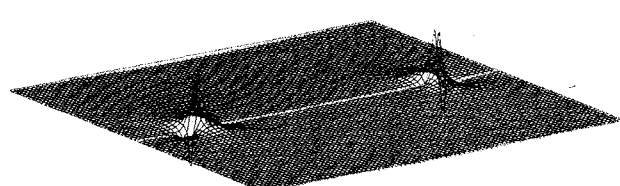


図 10 逆対称モードの R_x