

3 次せん断変形理論に基づく spline 要素法を用いた直交異方性厚板の振動解析

大同工業大学大学院 学生員 名木野晴暢
 大同工業大学 ○田中陽平
 大同工業大学 正員 水澤富作

1. まえがき 直交異方性板の動的応答や音響放射特性を明らかにするためには、材料学的な異方性（例えば、ヤング係数比やヤング係数とせん断弾性係数の比）を考慮する必要がある¹⁾。また、直交異方性板では、横せん断変形や回転慣性の影響が無視できなくなり、Mindlin 板理論を適用した研究は多く報告されているが、2 方向のせん断修正係数を同じ値で取り扱っているという問題点が見られる。

本研究では、任意の境界条件を有する直交異方性厚板の信頼性の高い解析手法として、せん断修正係数を用いない

Reddy の 3 次せん断変形理論に基づく spline 要素モデルを開発する。本手法を直交異方性板の振動解析に適用し、解の収束性及精度比較について検討を行っている。3 次元弾性理論や Mindlin 板理論による解と比較を行い、直交異方性板の振動特性に与える板厚比の影響と理論の相違についても検討を行っている。

2. 解析手法 Reddy のせん断変形理論とポテンシャルエネルギー最小の原理を用いて、図-1 に示される spline 要素モデルを導く。また、式の定式化にあたり、無次元直交座標系 ($\xi = x/a, \eta = y/b, \zeta = z/h$) を用いる。ここで、 a, b, h は、それぞれ厚板の幅、長さ、厚さである。Reddy のせん断変形理論では、それぞれ独立した次式のような変位関数が仮定される。ただし、面内変位 $U_0(\xi, \eta), V_0(\xi, \eta)$ は無視する。

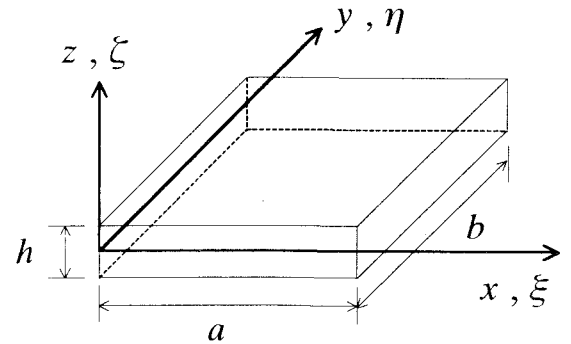


図-1 直交異方性厚板と座標系

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) &= h \left[\zeta \phi_x(\xi, \eta) - \left(\frac{4}{3} \right) \zeta^3 \left\{ \left(\frac{h}{a} \right) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \phi_x(\xi, \eta) \right\} \right] \\ v(\xi, \eta, \zeta) &= h \left[\zeta \phi_y(\xi, \eta) - \left(\frac{4}{3} \right) \zeta^3 \left\{ \left(\frac{h}{b} \right) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \phi_y(\xi, \eta) \right\} \right] \\ w(\xi, \eta, 0) &= h W(\xi, \eta) \end{aligned} \quad \dots(1)$$

ここで、 $\phi_x(\xi, \eta)$ 、 $\phi_y(\xi, \eta)$ は、それぞれ y 軸まわりおよび x 軸まわりの回転角、 $W(\xi, \eta)$ は、中立面でのたわみである。

Spline 要素モデルで仮定される 3 つの変位関数は、 B -spline 関数を用いて、それぞれ次式のように仮定する。

$$\phi_x(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} A_{mn} \cdot N_{m,k}(\xi) \cdot N_{n,k}(\eta), \phi_y(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} B_{mn} \cdot N_{m,k}(\xi) \cdot N_{n,k}(\eta), W(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} C_{mn} \cdot N_{m,k}(\xi) \cdot N_{n,k}(\eta) \quad \dots(2)$$

ここで、 $N_{m,k}(\xi)$ 、 $N_{n,k}(\eta)$ は正規化された B -spline 関数、 A_{mn} 、 B_{mn} 、 C_{mn} は、未定係数である。

厚板の全ポテンシャルエネルギー Π は、次式で与えられる。

$$\Pi = U_p - T \quad \dots(3)$$

ここで、 U_p はひずみエネルギー、 T は運動エネルギーである。

したがって、ポテンシャルエネルギー最小の原理を用いれば、次式の固有方程式が求められる。

$$\left([K]_{mni j} - n^{*2} [M]_{mni j} \right) \{\Delta\}_{ij} = 0 \quad \dots(4)$$

ただし、 n^* は振動数パラメータである。 $[K]_{mni j}$ と $[M]_{mni j}$ の大きさは、 $3(M_x + k - 1)(M_y + k - 1)$ であり、 M_x, M_y は、それぞれ x 方向および y 方向の要素分割数、 $k - 1$ は spline 次数である。

3. 数値計算例及び考察 はじめに、本手法の数値安定性について示す。直交異方性厚板は、表-1に示す物性値を持つアラゴナイトクリスタルとシトカスプルスである。ただし、シトカスプルス桁目板の振動数パラメータは、 $n^* = \omega b^2 \sqrt{\rho h / D_x}$ で表し、アラゴナイトクリスタル板は、

$n^{**} = \omega h \sqrt{\rho / D_{11}}$ で定義する。ここで、 $D_x = E_x h^3 / 12 (1 - \nu_{xy} \nu_{yx})$ は板の曲げ剛性であり、 $D_{11} = E_x / (1 - \nu_{xy} \nu_{yx})$ である。

表-2には、周辺単純支持されたアラゴナイトクリスタル板 ($b/a = 1.0$) の振動数パラメータ n^{**} の収束性に与える要素分割数の影響と精度比較が示してある。ここで、板厚比 h/a は 0.01 と 0.1 に設定し、spline 次数 $k-1=4$ 、要素分割数 $M_x = M_y$ は 8 から 24 まで変化させている。また、比較のために近藤ら²⁾の Mindlin 板理論に基づく数値解 (MPT), Reddy ら³⁾の高次せん断変形理論に基づく厳密解 (HSDT) と名木野ら¹⁾, Srinivas ら⁴⁾の 3次元弾性理論に基づく数値解、厳密解も示してある。これより、振動数パラメータは低次から高次まで、要素分割数の増大にともない一様な収束状態が示されており、他の数値解ともよく一致した結果が得られている。以後の数値計算例では、 $k-1=4$ 、要素分割は 20×20 としている。

次に、Reddy の 3 次せん断変形理論の適用限界について検討する。図-2には、周辺単純支持された正方形板の基本振動数 (1st mode) と比較的高次の 5th mode の振動数パラメータの誤差に与える板厚比と材種の影響が示してある。材種は、等方性板、異方性の比較的小さなアラゴナイトクリスタル板と異方性の大きなシトカスプルス桁目板としている。また、板厚比 h/a は 0.01 から 0.3 まで変化させている。誤差は、名木野ら¹⁾の 3次元弾性理論による解を基準としている。これより、等方性板とアラゴナイトクリスタル板では $h/a \leq 0.3$ であれば、十分適用可能である。しかしながら、シトカスプルス桁目板では、高次の振動数パラメータの誤差が板厚の増大にともない大きく現れてくる。この原因は、剛性マトリックスに現れる高次の導関数を含む要素に対応するせん断弾性係数 G_{zx} が、他のせん断弾性係数と比較して極端に小さな値になっているためと思われる。一般に、 G_{zx}/G_{xy} や G_{zx}/G_{yz} の値が 0.5 以上の範囲であればこのような問題は生じないことを確認している。

4. まとめ 得られた結果をまとめると、以下のようになる。1) 本手法は、アラゴナイトクリスタル板の振動解析の高い数値安定性を示している。2) Reddy のせん断変形理論の適用限界は、異方性が小さければ、 $h/a = 0.3$ 程度であると思われる。3) シトカスプルス桁目板のように、せん断弾性係数の比が非常に小さい問題 ($G_{zx}/G_{xy} = G_{zx}/G_{yz} = 0.05$) では、高次の導関数を含む要素の影響により数値不安定を生じてくる場合があると考えられる。

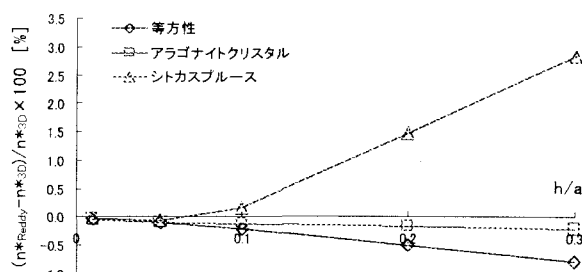
参考文献 1) 名木野他, 応用力学論文集. Vol. 6, pp. 321-330, 2003. 2) 近藤他, 応用力学論文集. Vol.4, pp.183-194, 2001. 3) J. N. Reddy and N. D. Phan, pp.157-170, 1985. 4) S.Srinivas and A.K.Rao, Int.J.Solids and Struct.Vol.6,pp.1463-1481,1970.

表-1 アラゴナイトクリスタルとシトカスプルスの物性値

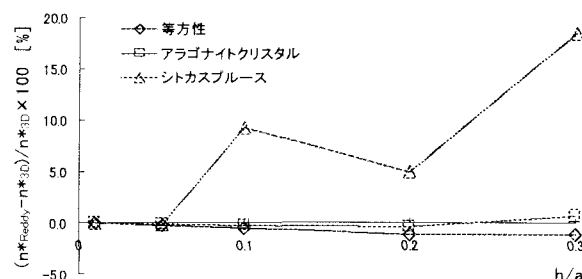
材種名	ヤング係数		せん断弾性係数			ポアソン比
	E_x	E_y	G_{xz}	G_{yz}	G_{xy}	ν_{xy}
アラゴナイトクリスタル ²⁾	20.83	10.94	3.71	6.19	6.10	0.44
	[$\times 10^6$ lbf/in ²]		[$\times 10^6$ lbf/in ²]			-
シトカスプルス ¹⁾	0.90	11.6	0.03	0.72	0.76	0.37
	[GPa]		[GPa]			-

表-2 周辺単純支持されたアラゴナイトクリスタル板の振動数パラメータの収束性に与える要素分割数の影響と精度比較: $b/a=1.0, k-1=4, SS-SS$

h/a	Mx=My	modes				
		1st	2nd	3rd	4th	5th
0.01	8	0.000496	0.00112	0.00135	0.00198	0.00215
	12	0.000496	0.00112	0.00135	0.00198	0.00215
	16	0.000496	0.00112	0.00135	0.00198	0.00215
	20	0.000496	0.00112	0.00135	0.00198	0.00215
	24	0.000496	0.00112	0.00135	0.00198	0.00215
	MPT ²⁾	0.000496	0.00112	0.00135	0.00198	0.00215
	3D ¹⁾	0.000496	0.00112	0.00135	0.00198	0.00215
0.1	8	0.0471	0.1027	0.1184	0.1683	0.1880
	12	0.0472	0.1030	0.1186	0.1688	0.1883
	16	0.0473	0.1030	0.1187	0.1690	0.1883
	20	0.0473	0.1031	0.1187	0.1691	0.1884
	24	0.0474	0.1031	0.1187	0.1691	0.1884
	MPT ²⁾	0.0473	0.1030	0.1185	0.1688	0.1882
	FSDT ³⁾	0.0474	0.1032	0.1187	0.1692	0.1884
	HSDT ³⁾	0.0474	0.1033	0.1189	0.1695	0.1888
	3D ^{1),4)}	0.04742	0.10329	0.11880	0.16942	0.18881



a) 1st mode



a) 5th mode

図-2 周辺単純支持された正方形板の振動数パラメータの誤差に与える板厚比と材種の影響: $b/a=1.0, k-1=4, SS-SS$