

Spline prism 法を用いた直交異方性厚板の 3 次元応力解析

大同工業大学大学院 学生員 名木野晴暢
 大同工業大学 ○佐野直樹 関本光晴
 大同工業大学 正員 水澤富作

1. まえがき 近年、構造物の大型化により、異方性材料から成る中等厚な板や極厚板が構造要素として用いられている。したがって、直交異方性板の信頼性の高い解析が、構造設計及び材料開発において重要な課題になっている。厚板や異方性板の解析では、横せん断変形の影響が無視できなくなる^{1),2)}。しかしながら、等方性板と比較して、直交異方性厚板の 3 次元応力解析に関する研究は、少ないように思われる。Srinivas ら³⁾は、3 次元弾性理論に基づき直交異方性板の 3 次元応力解析を行っている。Teo ら⁴⁾は、DQ 法を用いたアラゴナイトクリстал長方形板の 3 次元応力解析を行っているが、応力の厚さ方向の分布特性については、検討されていない。

本研究では、半数値解析法である spline prism 法を用いて、 η 軸に垂直な相対する 2 面がダイヤフラム型単純支持され、他の 2 面で任意の境界条件を有し、板表面に等分布荷重を受ける直交異方性板の 3 次元応力解析を行い、解の収束性や精度比較について検討を行っている。また、アラゴナイトクリстал板と木板の厚さ方向の応力分布特性に与える板厚比、境界条件および異方性の影響について明らかにしている。

2. 解析手法 直交異方性弾性理論とポテンシャルエネルギー最小の原理を用いて、図-1 に示される spline prism 要素モデルを導く。また、式の定式化にあたり、無次元直交座標系 ($\xi = x/a, \eta = y/b, \zeta = z/h$) を用いる。ここで、 a, b, h は、それぞれ厚板の幅、長さおよび厚さである。

spline prism 要素で仮定される x, y, z 方向の変位関数 U, V, W は、それぞれ次式で表される。

$$U = \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^{i_1} \sum_{n=1}^{i_2} A_{mn} \cdot N_{m,k}(\xi) \cdot N_{n,k}(\zeta) \cdot Y_l(\eta), V = \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^{i_1} \sum_{n=1}^{i_2} B_{mn} \cdot N_{m,k}(\xi) \cdot N_{n,k}(\zeta) \cdot \bar{Y}_l(\eta),$$

$$W = \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^{i_1} \sum_{n=1}^{i_2} C_{mn} \cdot N_{m,k}(\xi) \cdot N_{n,k}(\zeta) \cdot Y_l(\eta) \quad \dots(1)$$

ここで、 $N_{m,k}(\xi), N_{n,k}(\zeta)$ は正規化された B -spline 関数、 A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} は未定係数である。また、 η 軸に垂直な相対する 2 面が単純支持を仮定すれば、固有関数は次式で表すことができる。

$$Y_l(\eta) = \sin(l\pi\eta), \bar{Y}_l(\eta) = \cos(l\pi\eta); l=1,2,\dots,r \quad \dots(2)$$

ここで、 r は級数項である。板の全ポテンシャルエネルギー Π は、次式で与えられる。

$$\Pi = U_p - F \quad \dots(3)$$

ここで、 U_p はひずみエネルギー、 F は外力ポテンシャルである。したがって、ポテンシャルエネルギー最小の原理と固有関数の直交性を用いれば、次式の剛性方程式が得られる。

$$\sum_{i=1}^r \left([K]_{mni,j}'' \{\Delta\}_i - \{F\}_i \right) = 0 \quad \dots(4)$$

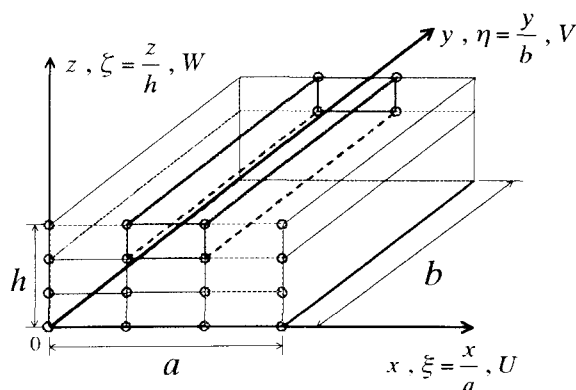


図-1 直交異方性厚板と座標系

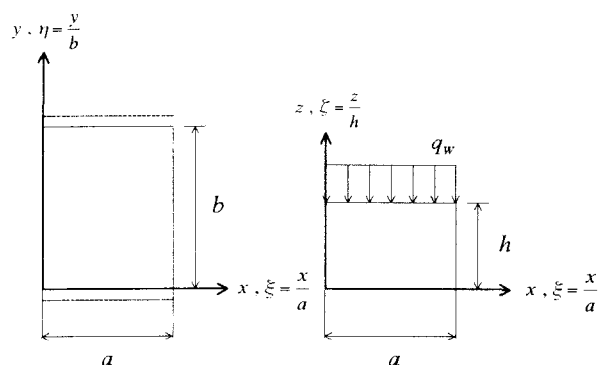


図-2 解析モデル図

3. 数値計算例および考察

表-1 には、本数値計算に用いるアラゴナイトクリスタル板³⁾とシトカスブルース柃目板²⁾の剛性係数比が示してある。解析モデルは、図-2 に示すような板表面に等分布荷重 q を受け、 η 軸に垂直な相対する2面がダイヤフラム型単純支持され、他の2面で任意の境界条件を持つ直交異方性板である。

表-2 には、それぞれ板厚比 h/a を0.05と0.1に仮定し、板表面に等分布荷重 q を受ける周面単純支持されたアラゴナイトクリスタル板($b/a=1.0$)の中央断面($\eta=0.5$)でのたわみ W ($\xi=\eta=\zeta=0.5$)と応力 σ_x , σ_y ($\xi=\eta=0.5$, $\zeta=1.0$)の収束性と精度比較が示してある。ここで、級数項 r は31と51に設定し、要素分割数は4から24まで変化させている。また、比較のためにTeoら⁴⁾の数値解とSrinivasら³⁾の厳密解も示してある。これより、たわみ W , 垂直応力 σ_x , σ_y は、要素分割数の増大とともに、安定した収束状態を示しており、また他の数値解や厳密解とよく一致した結果が得られている。以後の数値計算例は、局所応力の解析精度を高めるために、 $r=31$, $M_x=M_y=22$ を用いる。

図-3 には、アラゴナイトクリスタル板とシトカスブルース柃目板の板中央断面($\eta=0.5$)における応力 σ_y の厚さ方向の分布に与える板厚比 h/a の影響が示してある。ここで、 $b/a=1.0$, 境界条件は、 η 軸に垂直な相対する2面が型単純支持され、他の2面が固定面(SS-CC)であり、 h/a は、0.05から0.7まで変化させている。これより、アラゴナイト板では、比較的対称な応力分布性状を示すが、シトカスブルース柃目板では、板厚比が小さくても非線形な分布をなしており、板厚の増大に伴いかなり複雑な応力分布を示している。また、応力分布に与える表面荷重の影響は、板厚が大きくなるほど顕著に見られる。

4. まとめ

得られた結果をまとめると、以下のようになる。1) 本手法を用いれば、直交異方性板の数値安定性の高い応力解析が可能である。2) アラゴナイトクリスタル板の応力分布特性は、板厚に関係なくほぼ対称であるが、板厚比が大きくなると非線形な分布を示す。3) 強い異方性を示すシトカスブルース柃目板の応力分布特性は、板厚比が小さくても非線形な分布を示し、板厚の増大に伴いかなり複雑な応力分布を示している。

参考文献 1)水澤他: Spline Prism法を用いた長方形厚板の三次元曲げ解析について、土木学会論文集, 第489号/I-27, pp.101-110, 1994. 2)近藤他: Spline要素法を用いた変断面性状を有する長方形木板の振動解析, 応用力学論文集, Vol.4, pp.183-194, 2001. 3) S.Srinivas and A.K.Rao.: Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates. Int. J. Solids and Struct. Vol. 6, pp.1463-1481, 1970. 4) T.M.Teo, K.M.Liew.: Three-dimensional elasticity solutions to some orthotropic plate problems. Int. J. Solids Struct. 36, pp.5301-5326, 1999.

表-1 アラゴナイトクリスタルとシトカスブルースの剛性係数比

アラゴナイトクリスタルの剛性係数比 ³⁾							
D_{22}/D_{11}	D_{33}/D_{11}	D_{12}/D_{11}	D_{13}/D_{11}	D_{23}/D_{11}	D_{44}/D_{11}	D_{55}/D_{11}	D_{66}/D_{11}
0.543103	0.530172	0.23319	0.010776	0.098276	0.262931	0.26681	0.159914
シトカスブルース柃目板の剛性係数比 ²⁾							
D_{22}/D_{11}	D_{33}/D_{11}	D_{12}/D_{11}	D_{13}/D_{11}	D_{23}/D_{11}	D_{44}/D_{11}	D_{55}/D_{11}	D_{66}/D_{11}
11.6220	0.55372	0.48668	0.24826	0.35210	0.73586	0.69763	0.032493

サフィックス1,2,3はそれぞれ、x,y,z方向に対応している

表-2 アラゴナイトクリスタル板とシトカスブルース柃目板の中央断面でのたわみ、垂直応力与える要素分割数の影響と精度比較:
 $b/a=1.0$, $k=1=4$, SS-SS

h/a		r	Mx=My	$\xi=\eta=\zeta=0.5$	$\xi=\eta=0.5, \zeta=1.0$	$\xi=\eta=0.5, \zeta=1.0$
				W	σ_x	σ_y
31		4		-10444	-144.33	-87.068
		8		-10443	-144.30	-87.061
		12		-10443	-144.31	-87.059
		16		-10443	-144.31	-87.060
		20		-10443	-144.30	-87.058
		24		-10443	-144.30	-87.058
51		4		-10444	-144.33	-87.076
		8		-10443	-144.30	-87.069
		12		-10443	-144.31	-87.067
		16		-10443	-144.31	-87.068
		20		-10443	-144.31	-87.066
		24		-10443	-144.31	-87.066
Teo ⁽¹⁾			-10443.5	-144.339	-87.0900	
Srinivas ⁽³⁾			-10443	-144.31	-87.080	
31		4		-688.64	-36.042	-22.209
		8		-688.57	-36.027	-22.196
		12		-688.57	-36.019	-22.192
		16		-688.57	-36.015	-22.191
		20		-688.57	-36.014	-22.190
		24		-688.57	-36.014	-22.190
51		4		-688.64	-36.045	-22.217
		8		-688.57	-36.030	-22.204
		12		-688.57	-36.022	-22.200
		16		-688.57	-36.018	-22.198
		20		-688.57	-36.017	-22.198
		24		-688.57	-36.017	-22.198
Teo ⁽⁴⁾			-688.626	-36.0652	-22.2334	
Srinivas ⁽³⁾			-688.57	-36.021	-22.210	
Multiplier			qh/D11	q	q	q

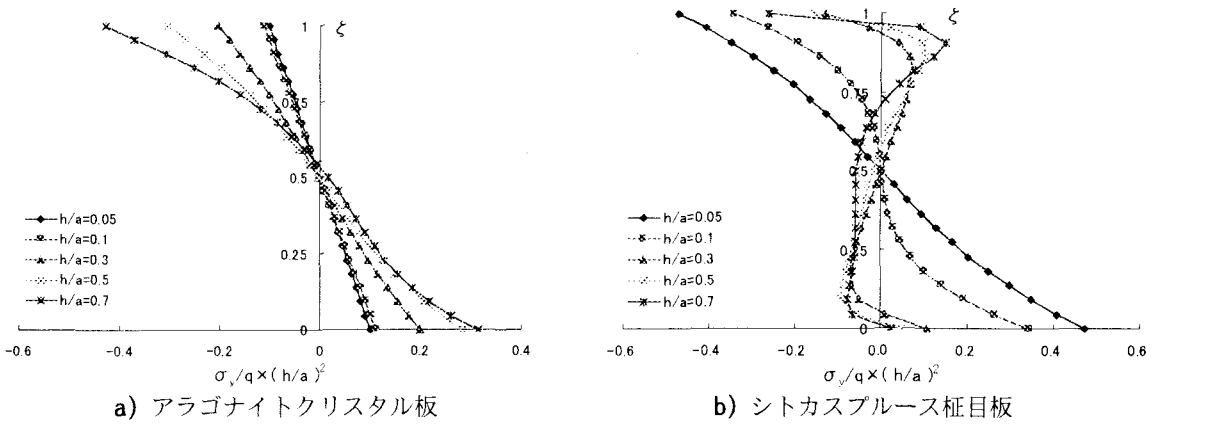


図-3 アラゴナイトクリスタル板とシトカスブルース柃目板の板中央断面における応力 σ_y の分布特性に与える板厚比の影響: $b/a=1.0, k=1=4, r=31, M_x=M_y=22, SS-CC$