

トルクを受ける直線桁のそり剛性マトリックスの誘導

大同工業大学大学院 学生員 ○名木野晴暢
大同工業大学 正員 事口壽男

1. まえがき 変位法は、分布荷重に対し等価節点荷重として取り扱うため、複雑な荷重状態では解析が繁雑になる。そこで、著者らは¹⁾、曲げと単純ねじりを受ける分布荷重載荷状態の水平面に曲率を有する曲線部材に対し、微分方程式の解から剛性マトリックスを誘導できる解法を提案した。この剛性マトリックスは、分布

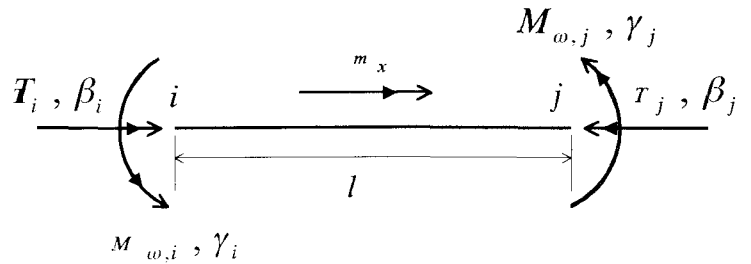


図-1 直線部材と荷重、変位及び断面力

荷重項が剛性マトリックスの内部に組み込まれており、解析はマトリックス演算のみで行われ、その有用性は高い。一般的に、ねじりやそりを生じる構造系に対して分布荷重項まで考慮した閉じた解の剛性マトリックスの定式化は、著者らが知る範囲では誘導されていない。曲げねじり理論で誘導される一般解の中には双曲線関数が混在するため、引数の増大につれて関数は発散するため安定性の高い構造解析手法が必要である。

本研究では、トルクを受ける直線部材のそり剛性マトリックスを誘導する。計算例として、分布ねじり荷重を受ける3径間連続桁橋を対象にし、伝達マトリックス法による結果²⁾との解の比較を行っている。

2. 微分方程式の解 図-1に示される分布トルクを受ける直線部材の剛性マトリックスを誘導する。薄肉直線桁に分布トルク m_x が作用したとき、ねじり角 $\beta(x)$ に関する微分方程式は次式で表される²⁾。

$$\frac{d^4 \beta(x)}{dx^4} - \alpha^2 \frac{d^2 \beta(x)}{dx^2} = \frac{m_x}{EI_\omega} \quad \dots(1) \quad \text{ここで、パラメータ } \alpha = \sqrt{GJ/EI_\omega} \text{ は、ねじりに関する断面定数比}$$

である。また、 E ：ヤング係数、 G ：せん断弾性係数、 I_ω ：そりねじり定数、 J ：純ねじり定数である。断面力とねじり角 $\beta(x)$ との関係は、次式で表される。

$$\gamma(x) = \frac{d\beta(x)}{dx}, M_\omega(x) = EI_\omega \frac{d^2 \beta(x)}{dx^2}, T(x) = -EI_\omega \frac{d^3 \beta(x)}{dx^3} + GJ \frac{d\beta(x)}{dx} \quad \dots(2)$$

ここで、 $\gamma(x)$ ：ねじり率、 $M_\omega(x)$ ：そりモーメント、 $T(x)$ ：合ねじりモーメントである。式(1)をラプラス変換して解を求め、共役対を (β, T) 、 (γ, M_ω) とし、図-1に示す変位法の符号に合わせてマトリックス表示すれば、(3)式で表される。

$$\begin{Bmatrix} \beta \\ \gamma \\ T \\ M_\omega \\ 1 \end{Bmatrix}_j = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sinh \alpha l}{\alpha} & -\frac{\alpha l - \sinh \alpha l}{GJ\alpha} & \frac{1 - \cosh \alpha l}{GJ} & -\frac{m(1 - \cosh \alpha l + 0.5\alpha^2 l^2)}{\alpha^2 GJ} \\ 0 & \cosh \alpha & -\frac{1 - \cosh \alpha l}{GJ} & -\frac{\alpha \sinh \alpha l}{GJ} & -\frac{m(\alpha l - \sinh \alpha l)}{\alpha GJ} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -ml \\ 0 & GJ \frac{\sinh \alpha l}{\alpha} & \frac{\sinh \alpha l}{\alpha} & -\cosh \alpha & -\frac{m(1 - \cosh \alpha l)}{\alpha^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ \gamma \\ T \\ M_\omega \\ 1 \end{Bmatrix}_i \quad \dots(3)$$

ここで、サフィックス i, j はそれぞれ材端を表す。

3. そり剛性マトリックスの誘導 ここで、 $\{\delta_j\} = \{\beta_j \ \gamma_j\}^T$ 、 $\{\delta_i\} = \{\beta_i \ \gamma_i\}^T$ 、 $\{R_j\} = \{T_j \ M_{\omega,j}\}^T$ 、 $\{R_i\} = \{T_i \ M_{\omega,i}\}^T$ とおけば、式(3)は、式(4)で表される。

$$\begin{Bmatrix} \{\delta_j\} \\ \{R_j\} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [F_{11}] & [F_{12}] & [\Delta_\delta] \\ [F_{21}] & [F_{22}] & [\Delta_R] \\ [0] & [0] & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_i\} \\ \{R_i\} \\ 1 \end{Bmatrix} \dots (4)$$

従って、式 (4) より、 $\{\delta_j\} = [F_{11}]\{\delta_i\} + [F_{12}]\{R_i\} + [\Delta_\delta] \cdot 1$ が得られる。 $\{R_i\}$ について解けば、

$$\{R_i\} = -[F_{12}]^{-1}[F_{11}]\{\delta_i\} + [F_{12}]^{-1}\{\delta_j\} - [F_{12}]^{-1}[\Delta_\delta] = [K_{11}]\{\delta_i\} + [K_{12}]\{\delta_j\} + [K_{13}] \cdot 1 \dots (5)$$

同様に、 $\{R_j\} = [F_{21}]\{\delta_i\} + [F_{22}]\{R_i\} + [\Delta_R] \cdot 1 = [K_{21}]\{\delta_i\} + [K_{22}]\{\delta_j\} + [K_{23}] \cdot 1 \dots (6)$

式(5)、(6)をマトリックス表示すれば、式 (7) の剛性方程式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \{R_i\} \\ \{R_j\} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & [K_{23}] \\ [0] & [0] & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_i\} \\ \{\delta_j\} \\ 1 \end{Bmatrix} \dots (7)$$

すなわち、 $\{F\} = [K]\{\Lambda\}$ である。ここで、 $\{F\}$ は、外力ベクトル、 $[K]$ は、誘導されたそりねじりを受ける剛性マトリックス、 $\{\Lambda\}$ は、未知量ベクトルである。式 (8) で表される $[K]$ は、各要素 k_{lm} で構成され、それぞれ、式 (9) で与えられる。ここに、 $\xi = \alpha l \sinh \alpha l + 2(1 - \cosh \alpha l)$ である。

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & -k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & -k_{12} & k_{24} & k_{23} \\ -k_{11} & -k_{12} & k_{11} & -k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{24} & -k_{12} & k_{22} & -k_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots (8)$$

$$\begin{aligned} k_{11} &= GJ \cdot \alpha \sinh \alpha l / \xi \\ k_{12} &= GJ \cdot (\cosh \alpha l - 1) / \xi \\ k_{22} &= GJ \cdot (\alpha l \cosh \alpha l - \sinh \alpha) / \alpha \xi \\ k_{24} &= GJ \cdot (\sinh \alpha l - \alpha l) / \alpha \xi \\ k_{13} &= -0.5 m l \cdot \{\alpha l \sinh \alpha l - 2(\cosh \alpha l - 1)\} / \xi \\ k_{23} &= -m \cdot \{(\alpha^2 l^2 + 4) \cosh \alpha l - 4 \alpha l \sinh \alpha l + \alpha^2 l^2 - 4\} / 2 \alpha^2 \xi \end{aligned} \dots (9)$$

4. 数値計算例及び考察 図-2 に、数値計算例に用いた 3 径間連続桁橋及び荷重状態を示す。節点は、各支点、集中トルク作用位置及びスパン中央にとり、要素数は 6 分割としている。

表-1 に数値計算結果を示す。また、比較のために中井らの伝達マトリックス法 (TMM) の解²⁾ も示してある。また、表中の【】は支点反力 (反力トルク) を表している。本手法による解は、伝達マトリックス法の解と完全一致している。また、引数 αl が大きい場合の数値も精度良い結果が得られている。

5. まとめ

本研究では、トルクを受けるそり剛性マトリックスを微分方程式の閉じた解から、数学的に誘導した。また、従来の変位法のような等価節点荷重

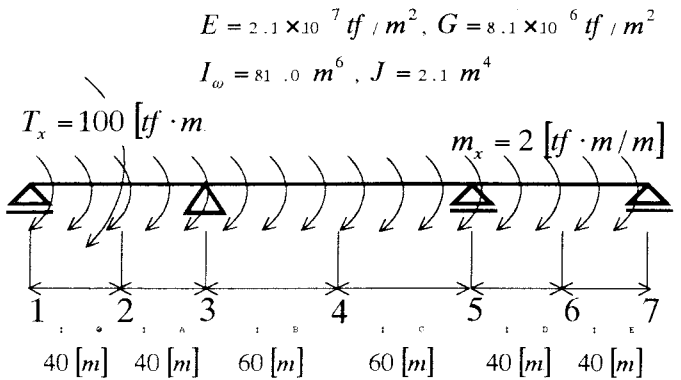


図-2 3 径間連続桁橋及び荷重状態

表-1 未知量及び反力の精度比較 (図-2 モデル)

	Multiplier	Method	Nodal point						
			1	2	3	4	5	6	7
β and 【T】	$\times 10^{-4}$ [rad] 【 [tf·m] 】	Present	【115.96】	1.391	【266.39】	1.425	【208.16】	0.589	【-69.49】
		TMM	【115.96】	1.391	【266.39】	1.425	【208.16】	0.589	【-69.49】
T_s	[tf·m]	Present	94.22	-11.98	-9.934	2.280	-13.56	8.970	-49.56
		TMM	94.22	-11.98	-9.934	2.280	-13.56	8.970	-49.56
M_w	$\times 10^5$ [tf·m ²]	Present	0.000	-0.672	1.123	-0.194	0.841	-0.177	0.000
		TMM	0.000	-0.672	1.123	-0.194	0.841	-0.177	0.000

概念は不要であり、すべて行列演算だけの統一的な解析が可能であり、数値安定性が高い結果が得られる。

謝辞： 福井工業大学の中井博教授には、多大なご指摘を受けました。ここに厚く御礼申し上げます。

参考文献 1). 名木野, 事口他: 水平面内に曲率を有する曲線桁橋の剛性マトリックスの誘導, 第 58 回年次学術講演会講演概要集, 1-224, pp. 447-448, 2003. 2). 中井, 事口: 伝達マトリックス法による鋼橋の解析, 森北出版, 1992.