

Spline メッシュレス法を用いた平板の曲げ解析

大同工業大学 正員 ○水澤富作

大同工業大学 後藤大輔

1. はじめに 4 階の偏微分方程式で表される平板の曲げ解析では、等価な汎関数と要素内で仮定される区分的多項式に基づく有限要素法が多用されている。一方、要素分割に依存しない各種のメッシュレス法が開発され、平板解析への適用についても研究されている。この方法は、メッシュレス法である古典的な Ritz-Galerkin 法等と比較して、移動最小二乗法や Particle 法に基づく重み付き残差離散化法¹⁾である。

著者らは、微分方程式の数値的解析法として、Lagrange 多項式を導関数の補間式に適用した DQ 法を用いた平板の振動解析を行っている²⁾。この方法は、差分法と選点法を一般化したメッシュレス法であるが、係数行列が非対称になり、また離散点の取り方により、解の不安定性が現れる。

本研究では、spline 関数を基底関数に仮定する選点最小二乗法³⁾を用いた平板の曲げ解析を行い、解の収束性や解析精度に与えるスプライン次数や離散点の数などの影響について検討している。

2. 解析手法 4 階の偏微分方程式で表される平板の曲げ問題は、Levy 法を適用すれば、4 階の常微分方程式で表される。ここでは、spline 関数を基底関数に仮定した選点最小二乗法の定式化を示す。

1 次元の線形境界値問題は、微分演算子 L, B を用いて、次式で表される。

$$L(w) = q(x) \quad \text{領域} [0 \leq x \leq a], \quad B(w) = g(x) \quad \text{境界} (x = 0, x = a) \quad (1)$$

ここで、 w は変位であり、 $q(x), g(x)$ は、与えられた関数である。したがって、領域残差 R_L と境界残差 R_B は、それぞれ次式で表される。

$$R_L = L(w) - q(x), \quad R_B = B(w) - g(x) \quad (2)$$

これらの残差を領域内の選点 (N 個) と境界点 (M 個) について求めると、

$$R_L(x_i) = L(w_i) - q(x_i); \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad R_B(x_{N+j}) = B(w_{N+j}) - g(x_{N+j}); \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (3)$$

で示される。変位関数 w は、B-spline 関数を用いて、次式で仮定する。

$$w = \sum_{m=1}^N C_m N_{m,k}(x); \quad N = m_x + k - 2 \quad (4)$$

ここで、 $N_{m,k}(x)$ は、正規化された B-spline 関数であり、 m_x と $k-1$ は、それぞれ区分点の数と spline 次数である。また、 C_m は、未定係数である。したがって、式 (4) を式 (3) に代入して、これをマトリックス表示すると、次式になる。

$$\{R\} = \{R_L\} + \{R_B\} = [Z]\{C\} - \{P\} \quad (5)$$

係数マトリックス $[Z]$ の大きさは、 $N \times (m_x + M)$ になり、また $N \leq (m_x + M)$ になるので、 $[Z]$ は長方形マトリックスになる場合もある。また、 $\{C\}^T = \{C_1, C_2, \dots, C_N\}$ である。

式 (5) で与えられる残差の二乗誤差 I_d は、最小二乗法を適用すると、次式で与えられる。

$$I_d = \sum_{i=1}^{M_x} [R_L(C_m, x_i)]^2 + \sum_{i=M_x+1}^{M_x+M} [R_B(C_m, x_i)]^2 = \{R\}^T \{R\} \quad (6)$$

したがって、式 (6) を極値化すれば、次式が導ける。

$$\frac{\partial I_d}{\partial \{C\}} = [Z]^T [Z] \{C\} - [Z]^T \{P\} = [K] \{C\} - \{F\} = 0 \quad (7)$$

ここで、 $[K] = [Z]^T [Z]$ は、対称マトリックスであり、その大きさは、 $N \times N$ になる。

図-1 に示すように、 x 軸に平行な 2 辺が単純支持された長方形板の支配方程式は、無次元直交座標系 ($\xi = x/a, \eta = y/b$) を用いて、次式で与えられる。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2(a/b)^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + (a/b)^4 \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} = \frac{qa^4}{D} \quad (8)$$

一方向にフーリエ級数展開する Levy 法を適用すると、変位関数 w と分布荷重 q は、次式で仮定される。

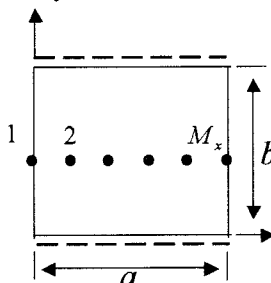


図-1 長方形板

$$w(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{NN} \sum_{m=1}^N C_m N_{m,k}(\xi) \sin(n\pi\eta), q = \sum_{n=1}^{NN} q \sin(n\pi\eta) \quad (9)$$

ここで、NN は級数の項数である。したがって、式 (9) を式(8)に代入すれば、支配方程式は、

$$\sum_{m=1}^N C_m [N_{m,k}^{(4)}(\xi) + 2(a/b)^2(-n^2\pi^2)N_{m,k}^{(2)}(\xi) + (a/b)^4(n\pi)^4 N_{m,k}(\xi)] = (4q/n\pi)a^4/D \quad (10)$$

で表される。ただし、 $N_{m,k}^{(j)}(\xi) = d^j N_{m,k}(\xi)/d\xi^j$ である。

また、y 軸に平行な 2 つの辺には、単純支持($w = 0, M_x = 0$)、

固定 ($w = 0, \partial w / \partial x = 0$) および自由 ($M_x = 0, V_x = 0$) の境界条件が導入される。式(9)を用いて書き換えると、次式になる。

$$(i) \text{ 単純支持辺: } \sum_{m=1}^N C_m N_{m,k}(\xi) = 0, \\ \sum_{m=1}^N C_m [N_{m,k}^{(2)}(\xi) + \nu(a/b)^2(-n^2\pi^2)N_{m,k}(\xi)] = 0$$

$$(ii) \text{ 固定辺: } \sum_{m=1}^N C_m N_{m,k}(\xi) = 0, \sum_{m=1}^N C_m N_{m,k}^{(1)}(\xi) = 0$$

$$(iii) \text{ 自由辺: } \sum_{m=1}^N C_m [N_{m,k}^{(2)}(\xi) + \nu(a/b)^2(-n^2\pi^2)N_{m,k}(\xi)] = 0, \\ \sum_{m=1}^N C_m [N_{m,k}^{(3)}(\xi) + (2-\nu)(a/b)(-n^2\pi^2)N_{m,k}^{(1)}(\xi)] = 0$$

3. 数値計算例および考察

表-1 には、他の相対する 2 辺が単純支持、自由および固定に仮定し、等分布荷重を受ける正方形板の中央点でのたわみと曲げモーメントの収束性に与える選点(サンプリング点) m_x と spline 次数 $k-1$ の影響が示してある。ここで、選点 m_x は、5 から 21 まで変化させ、また spline 次数 $k-1$ は、5 次と 6 次に仮定している。また、比較のために、Levy 解も示してある。また、図-2 には、周辺単純支持された板のたわみの収束性に与える spline 次数 $k-1$ の影響が示してある。

これより、6 次の spline 関数を用いると、少ない選点でも、安定した収束性が得られている。また、5 次の spline 関数を用いても、選点の増大とともに、一様な収束状態が得られる。また、収束値は、境界条件に関わらず、厳密解と一致した結果が示されている。

4. まとめ 本文で得られた結果は、以下のように纏められる。1) spline 選点最小二乗法は、メッシュレス法の 1 手法であり、数値積分を必要とせず、また対称な係数マトリックスが得られるので、数値安定性の高い解析結果が得られている。2) 支配方程式に含まれる導関数の最高次数に 2 を足した次数の spline 関数を適用すれば、安定した収束性と高い解析精度が示される。

参考文献 1) Belytschko, T. et. al.: Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 139, pp. 3-47, 1996. 2) 近藤. 高木, 水澤: 応用力学論文集, Vol. 3, pp. 193-201, 2000. 3) Mizusawa, T. and Kajita, T., Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 16, pp. 897-907, 1982.

表-1 他の2辺が任意の境界条件を有する正方形板の中央点のたわみと曲げモーメントの収束性と精度比較: $a/b=1$

Boundary conditions	k-1	m_x	W $10^{-3}qa^4/D$	M_x $10^{-2}qa^2$	M_y $10^{-2}qa^2$
SS-SS	6	5	4.070	4.798	4.798
		9	4.063	4.789	4.789
		13	4.062	4.789	4.789
		17	4.062	4.789	4.789
	5	21	4.062	4.789	4.789
		5	4.236	4.979	4.979
		9	4.102	4.832	4.832
		13	4.080	4.808	4.808
		17	4.072	4.800	4.800
		21	4.069	4.796	4.796
	Levy解		4.062	4.789	4.789
SS-FF	6	5	1.306	2.709	1.226
		9	1.309	2.708	1.226
		13	1.309	2.708	1.225
		17	1.309	2.708	1.225
	5	21	1.309	2.708	1.225
		5	1.336	2.744	1.249
		9	1.316	2.716	1.231
		13	1.312	2.711	1.228
		17	1.310	2.710	1.227
		21	1.310	2.709	1.226
	Levy解		1.309	2.710	1.225
SS-CC	6	5	1.928	3.402	2.586
		9	1.917	3.325	2.439
		13	1.917	3.325	2.439
		17	1.917	3.325	2.439
	5	21	1.917	3.325	2.439
		5	1.529	2.652	2.344
		9	1.951	3.384	2.484
		13	1.932	3.349	2.457
		17	1.925	3.338	2.449
		21	1.922	3.333	2.445
	Levy解		1.92	3.32	2.44

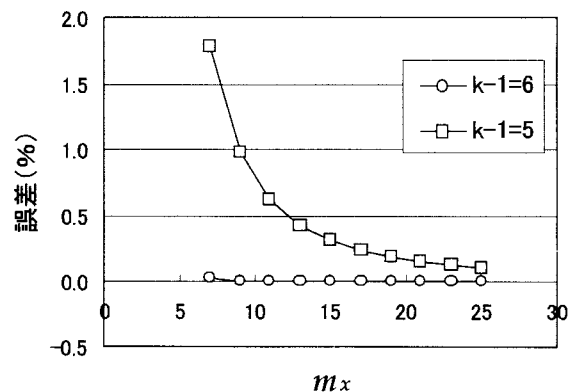


図-2 板中央点のたわみの収束性に与える spline 次数の影響: $a/b=1, SS-SS$