複合材料としての薄肉平板の動的特性

東海大学海洋学部　正会員　川上哲太朗
○東海大学海洋学部　草加　英之
東海大学海洋学部　青木由香利

はじめに

平板は，最も基本的な構造要素の一つであり，近年，複合材料の使用などによる平板の構造的多様化に伴い，その力学的特性も複雑化してきている．また，平板は基本的構造要素であるがために，古くから静的にも動的にも，理論解析的あるいは数値解析的にも研究が行われてきている．しかしながら，それらのほとんどは、平板を単一の材料物性で構成された均質材料として取り扱っており，平板内に材料物性の異なる領域を有する複合材料としての研究はほとんど行われていない．

そこで本研究では、平板領域内に任意形状の異種材料領域を有する薄肉平板の動的応答問題の解明を目的として、境界要素法による数値解析的アプローチを行ったものである．

本研究で取り扱った平板内の異種材料領域とは，腐食などによって発生した劣化領域や，逆に溶接などによって硬化した領域，さらには複合材料と想定することが可能である．したがって，本研究によって示された解析手法は，動的荷重作用下におけるこれら平板構造の力学特性の把握や，振動法等による非破壊評価手法への応用など，広範囲な実際的問題への拡張が可能であると考えられる．

薄肉平板の動的問題の定式化

等方，均質で一様な厚さの線形弾性薄肉平板の時間調和振動に関する運動方程式は，次の様に表せる．

$$\left(\Delta^2-\lambda^4\right)u(\mathbf{X})=\left(\Delta-\lambda^2\right)\left(\Delta+\lambda^2\right)u(\mathbf{X})=\frac{p(x)}{K} \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

ここに，Δはラプラシアン，uはたわみベクトル，pは単位面積当りの垂直荷重を表す．また，ρを密度，hを平板の厚さ，νをポアソン比，Eをヤング率，角周波数をωとして，K及びλは次式により与えられる．

$$K=\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)} \quad \cdots\cdots \quad (2) \qquad \lambda^4=\frac{\omega^2\rho h}{K} \quad \cdots\cdots \quad (3)$$

さらに，(1)式の解すなわち基本解は，$H_0^{(1)}$を第1種0次ハンケル関数として次の様に表される．

$$U(\mathbf{X},\mathbf{Y};\lambda)=-\frac{i}{8\lambda^2}\left[H_0^{(1)}(\lambda r)-H_0^{(1)}(i\lambda r)\right] \quad \cdots\cdots \quad (4)$$

次に，平板の内部・外部問題，境界等の定義を **Fig. 1** に示す．図中において，Dは平板の支配方程式が定義されている内部領域，D_Cはその補領域である外部領域を表す．また，$\mathbf{n}$は外向き単位法線ベクトル$\mathbf{s}$は接線ベクトルである．平板のたわみとたわみ角に関する積分表現は，Green の公式と基本解より，領域内および境界上の4つの物理量すなわち，たわみ，たわみ角，曲げモーメント，等価せん断力を用いて定式化される．内部問題におけるたわみに関する境界積分方程式は次式のようになる．

$$-\int_{D_-}U(\mathbf{X},\mathbf{Y};\lambda)\frac{p(\mathbf{Y})}{K}dA_Y+\int_{\partial D}\Big[U(\mathbf{X},y;\lambda)\{\mathbf{V}_n u(y)\}-\{\partial_{n_y}U(\mathbf{X},y;\lambda)\}\{\mathbf{M}_n u(y)\}+\{\mathbf{M}_{n_y}U(\mathbf{X},y;\lambda)\}\{\partial_n u(y)\}-\{\mathbf{V}_{n_y}U(\mathbf{X},y;\lambda)\}\{u(y)\}\Big]ds_y$$
$$=-u_p(\mathbf{X})+\left[\mathbf{S}(\mathbf{V}_n u)\right](\mathbf{X})-\left[\mathbf{D}(\mathbf{M}_n u)\right](\mathbf{X})+\left[\mathbf{M}(\partial_n u)\right](\mathbf{X})-\left[\mathbf{V}(u)\right](\mathbf{X})=\frac{1}{2}u(x) \quad (\mathbf{X}=x\in\partial D) \quad \cdots\cdots \quad (5)$$

同様に内部問題におけるたわみ角に関する境界積分方程式は次式のようになる．

$$-\partial_{n_x}u_p(\mathbf{X})+\left[\partial_{n_x}\mathbf{S}(\mathbf{V}_n u)\right](\mathbf{X})-\left[\partial_{n_x}\mathbf{D}(\mathbf{M}_n u)\right](\mathbf{X})+\left[\partial_{n_x}\mathbf{M}(\partial_n u)\right](\mathbf{X})-\partial_{n_x}\left[\mathbf{V}(u)\right](\mathbf{X})=\frac{1}{2}\partial_{n_x}u(x) \quad (\mathbf{X}=x\in\partial D) \quad \cdots\cdots \quad (6)$$

ここで，$u_p(\mathbf{X})$は入力振動を表す．さらに，内部問題と同様に，外部問題におけるたわみ及びたわみ角に

関する境界積分方程式は次のようになる．

$$-u_p(\mathbf{X})-[\mathbf{S}(\mathbf{V}_n u)](\mathbf{X})+[\mathbf{D}(\mathbf{M}_n u)](\mathbf{X})-[\mathbf{M}(\partial_n u)](\mathbf{X})+[\mathbf{V}(u)](\mathbf{X})=\frac{1}{2}u(x) \quad (\mathbf{X}=x\in\partial D) \qquad \cdots\cdots \quad (7)$$

$$-\partial_{n_x}u_p(\mathbf{X})-[\partial_{n_x}\mathbf{S}(\mathbf{V}_n u)](\mathbf{X})+[\partial_{n_x}\mathbf{D}(\mathbf{M}_n u)](\mathbf{X})-[\partial_{n_x}\mathbf{M}(\partial_n u)](\mathbf{X})+\partial_{n_x}[\mathbf{V}(u)](\mathbf{X})=\frac{1}{2}\partial_{n_x}u(x) \quad (\mathbf{X}=x\in\partial D) \qquad \cdots\cdots \quad (8)$$

Fig. 2 に，領域の接続方法に関する概念を示す．D_1は∂Dを境界とする孔を有する無限平板を表し，D_2は∂Dを境界とする有限平板を表す．したがって，領域D_1では外部問題となり，境界∂D上において，境界積分方程式(7)式及び(8)式が成立する．また，領域D_2では内部問題となり，境界∂D上において，境界積分方程式(5)式及び(6)式が成立する．この２つの領域D_1と領域D_2は，同一形状の境界∂Dを有し，また，境界上の物理量も同じであることから，この共通の境界上で各領域を接続し重ね合わせることが可能である．この接続を行った共通の境界を∂D_Cと新たに定義する．領域の接続条件は，境界∂D_C上で次の関係を満足するように与えられる．

$$u_1(x)=u_2(x)\,,\ \partial_n u_1(x)=\partial_n u_2(x)\,,\ \mathbf{M}_n u_1(x)=-\mathbf{M}_n u_2(x)\,,\ \mathbf{V}_n u_1(x)=-\mathbf{V}_n u_2(x) \qquad \cdots\cdots \quad (9)$$

ここで，添字１と２は，領域D_1と領域D_2に関する量であることを表す．

上記の接続条件により接続された新たな領域は，異種材料領域を有する無限平板を表すことになる．また，接続境界∂D_C上において，境界積分方程式(5)，(6)式および(7)，(8)式が成立し，境界上で定義される未知量は(9)式に示された，たわみ，たわみ角，曲げモーメント，等価せん断力であることから，未知量の数と方程式の数が一致する．したがって，境界積分方程式(5)，(6)，(7)，(8)式を連立方程式として解くことが可能であり，接続境界上の未知量が決定される．

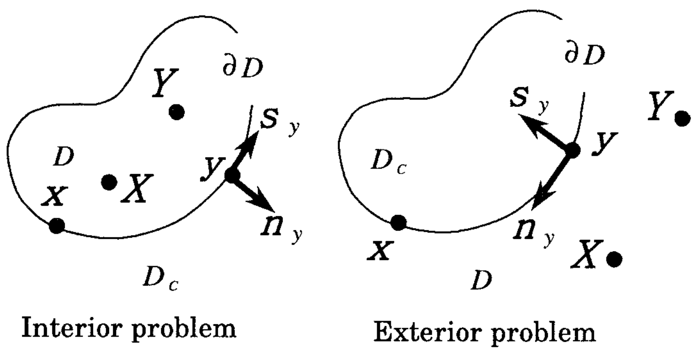

Fig. 1 Definition of interior problem and exterior problem

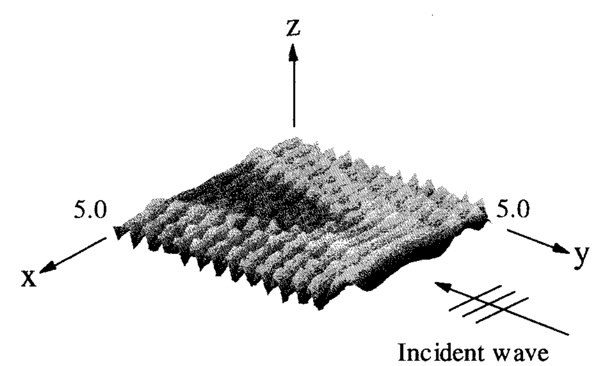

Fig. 3 Dynamic response of deflection

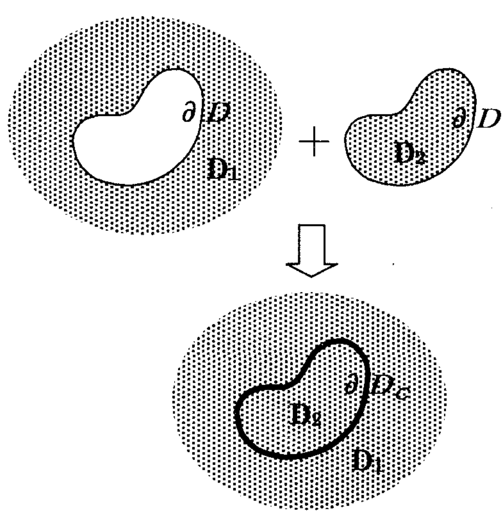

Fig. 2 Coupling of infinite plate and finite plate

数値計算例

Fig. 3 に円形の異種材料領域の板剛性K_2とその周辺の無限平板の板剛性K_1との比K_2/K_1=0.1 および，荷重角周波数ω=10000(rad/s)の場合における，異種材料領域およびその周辺領域でのたわみの分布を示す．図より異種材料領域においてたわみは周辺領域に比べて小さくなり，また，入射方向に対する異種材料領域の背後領域において，異種材料領域と同様にたわみの小さい領域が扇状に顕著に現われていることがわかる．